Série A, n° 3971
N° d'ordre : 4822

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir
le Grade de Docteur ès-Sciences Mathématiques

par

Khaled MAGHOUT

1ère Thèse : «Applications de l'Algèbre de Boole à la théorie des graphes et aux programmes linéaires et quadratiques»

2ème Thèse : Propositions données par la Faculté

Soutenues le 5 décembre 1962 devant la Commission d'Examen

MM. DE POSSEL : Président

FORTET, VILLE } Examinateurs

BERGE : Invité

Série A, nº 3971
Nº d'ordre : 4822

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir
le Grade de Docteur ès-Sciences Mathématiques

par

Khaled MAGHOUT

1ère Thèse : «Applications de l'Algèbre de Boole à la théorie des graphes et aux programmes linéaires et quadratiques»

2ème Thèse : Propositions données par la Faculté

Soutenues le 5 décembre 1962 devant la Commission d'Examen

MM. DE POSSEL : Président

FORTET, VILLE } Examinateurs

BERGE : Invité

BIBLIOTHEEK
LEIDEN

R.U.NIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen ..... M. ZAMANSKY

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure
DE BROGLIE	T	Théories physiques
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés
PREVOST	T	Chimie organique
CHAUDRON	T	Chimie appliquée
WYART	T	Minéralogie et Cristal.
TEISSIER	T	Zoologie
MANGENOT	T	Biologie Vég. (Orsay)
AUGER	T	Physique quantique et Relativité
MONNIER	T	Physiologie Générale
PIVETEAU	T	Paléontologie
ROCARD	T	Physique (E.N.S.)
CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.)
LAFFITTE	T	Chimie générale
FAVARD	T	Géométrie supérieure
COULOMB	T	Physique du Globe
Mlle COUSIN	T	Biologie Animale (SPCN)
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale
DRACH	T	Zoologie
KASTLER	T	Physique (E.N.S.)
EPHRUSSI	T	Génétique
RIVIÈRE	T	Géologie SPCN et sédim.
GAUTHERET	T	Biologie Vég. (P.C.B.)
LUCAS R.	T	Recherches Physiques
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire
ARNULF	T	Optique appliquée
MORAND	T	Physique Enseignement
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.)
FORTIER	T	Mécanique exp. des Fluides
DANJON	T	Astronomie
PETIT	T	Biologie maritime
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique
GALLIEN	T	Embryologie
EICHHORN	T	Botanique
DE CUGNAC	T	Biologie Végétale (SPCN)
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie Physique
THELLIER	T	Physique du Globe
L'HERITIER	T	Biologie Générale (Orsay)
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay)
PONCIN	T	Mécanique Générale
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des Nombres
QUELET	T	Chimie Organique
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée

CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire
CUVILLIER	T	Micropaléontologie
JUNG	T	Pétrographie
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique
WIEMANN	T	Chimie organique et struc.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay)
VASSY	T	Physique de l'atmosphère
DESTOUCHES	T	Théories Physiques
AMIEL	T	Chimie générale
HOCART	T	Minéralogie et Cristallog.
J.P. MATHIEU	T	Physique (Optique)
COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.)
MAY	T	Zoologie (Orsay)
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie
FELDMANN	T	Biologie Végétale marine
GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay)
JOST	T	Physiologie comparée
FORTET	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique
SCHWARTZ	T	Calcul diff. et Intégral
CHOUARD	T	Physiologie Végétale
MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéronaut.)
BRELOT	T	Calcul diff. et intégral
NORMANT	T	Synthèse organique générale
BENARD	T	Chimie Minérale
BUVAT	T	Botanique (E.N.S.)
DUGUE	T	Statistiques Mathématiques
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie
ULRICH	T	Physiologie Végétale
MARÉCHAL	T	Optique théorique et Appl.
KIRRMANN	T	Théories Chimiques
CHADEFAUD	T	Botanique
Mlle LE BRETON	T	Physiologie de la nutri.
SALEM	T	Mathématiques générales
LELONG	T	Applic. de l'analyse à la géométrie
DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie Comp.
EHRESMANN	T	Topologie Algébrique
FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.)
GLANGEAUD	T	Géographie phys. et Géologie dynamique
GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.)
PISOT	T	Tech. Mathém. de la Phys.
ROCH	T	Géologie
SCHATZMAN	T	Astrophysique
TERMIER	T	Paléontologie stratig.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales
LENNUIER	T	Physique (M.G.P.)
RIZET	T	Génétique (Orsay)
ROUTHIER	T	Géologie appliquée
M^me^ TONNELAT	T	Physique Théorique
DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.)
SOUCHAY	T	Chimie générale
AIGRAIN	T	Electrotechnique géné.
BRUSSET	T	Chimie systématique

M. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
Mme CHAIX	T	Chimie biologique
Mme HUREL-PY		Biologie Végétale (PCB)
PIAUX	T	Chimie (M.P.C.)
BRUN	T	Mécan. théorique des Fluides
LEDERER	T	Chimie biologique
Mme DUBREIL	T	Mathém. (Agrégation)
Mme LELONG	T	Mathématiques (E.N.S.)
BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.)
COTTE	T	Physique électricité
DUBOIS J.E.	T	Chimie organique
LAMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.)
MICHEL A.	T	Chimie Minérale (Orsay)
OLMER	T	Energétique générale
ROUAULT	T	Electricité (Orsay)
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée
BARCHEWITZ	T	Chimie Physique
BROSSEL	T	Physique atomique
BUSER	T	Physiologie comparée
CAMUS	T	Physiologie Végétale BMPV
CASTAING	T	Physique (Orsay)
CURIEN	T	Minéralo. et Cristallog.
MOYSE	T	Physiologie Végétale (Orsay)
NOIROT	T	Evolution des Êtres Org.
PANNETIER	T	Chimie générale (Orsay)
POSSOMPES	T	Zoologie
PULLMANN	T	Chimie théorique
TEILLAC	T	Physique Nucl. et Radioactivité
TONNELAT	T	Biologie Physico-chim.
VILLE	T	Econométrie
WILLEMART	T	Chimie (P.C.B.)
DODE	T	Chimie (Orsay)
FREYMANN	T	Recherches Physiques
GUINOCHET	T	Biol. Vég. SPCN (Orsay)
ROLLET	T	Chimie (P.C.B.)
Mlle JOSIEN	T	Chimie S.P.C.N.
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes
ARNOULT	T	Électronique (Orsay)
CHAPELLE	T	Physique (Orsay)
DELANGE	T	Mathématiques (Orsay)
DENY	T	Mathématiques Géné. Orsay
GERMAIN	T	Mécan. théor. des fluides
LUCAS G.	T	Géologie
ALLARD	T	Chimie Physique
BERTHELOT	T	Phys. Fondamentale des Hautes Énergies (Orsay)
BRICART	T	Météorologie et phys. de l'Atmosphère
Mme ALBE-FESSARD	T	Psychophysiologie
FRIEDEL	T	Physique des Solides (Ors)
M. JULIA	T	Études des Moléculaires naturelles complexes
LENDER	T	Biol. Animale (SPCN) Orsay
MAGAT		Physico-chimie des radio-éléments
Melle QUINTIN	T	Electrochimie

MONOD	T	Chimie du métabolisme
BENOIT	T	Physiol. Anim. (Orsay)
DE POSSEL	T	Analyse numérique
CHARLOT	T	Chimie analytique
HAISSINSKY	T	Radiochimie
LEMEE	T	Physiol. Vég. BMPV (Orsay)
GUERIN	T	Chimie M.P.C. (Orsay)
CHATELET M.	T	Chimie (P.C.B.)
JEAN	T	Physique Nucléaire (Orsay)
MATTLER	T	Physique S.P.C.N.
MICHEL L.		Phys. Théor. des Htes Énergies (Orsay)
BERGERARD	T	Zoologie (Orsay)
BERTEIN	T	Electronique (Orsay)
BOUISSIÈRES		Chimie des Radio-éléments (Orsay)
Mme COUTURE	T	Thermodynamique et Méc. Physique
ELLENBERGER	T	Géologie appli. s/le terr.
FRANC		Biol. Animale (P.C.B.)
SCHNELL		Botanique tropicale (Orsay)
STOLKOWSKI		Physiologie générale
ACHER		Chimie Biol. (Orsay)
BAUDOIN		Biologie animale P.C.B,
BEAUMONT		Biologie animale SPCN
BLAMONT	T	Géophysique Ionosphère
BOURREAU		Botanique
CURIE D.		Physique (M.G.P.)
DURAND-DELGA		Géologie
FRÉON	T	Chimie organique (Orsay)
HELLER	T	Physiologie végétale
TORTRAT	T	Calcul des Probabilités
CAILLEUX		Géologie (S.P.C.N.)
MAGNAN	T	Physique (S.P.C.N.)
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appl. à la Chim. Théor. et à la Phys. Nucléaire
Mlle FOURCROY		Biol. Végétale (SPCN)
Mme CHOQUET-BRUHAT	T	Méc. Analytique et Méc. céleste
Mlle VEIL		Physiologie Générale
LWOFF	T	Microbiologie
SIESTRUNCK	T	Mécan. Phys. et Expérim.
LACOMBE	T	Métallur. des métaux Nucl.
BROCHARD	T	Physique P.C.B. (Orsay)
CABANNES	T	Mécanique générale
LESIEUR	T	Mathématiques MPC (Orsay)
MAZET	T	Mécanique générale (Orsay)
CAIRE		Géographie phys. et Géol. Dynamique
COMOLET	T	Mécanique des Fluides
CORABOEUF		Physiologie Animale
DELLOUE		Physique de l'exosphère
GORENFLOT		Botanique II (Orsay)
HOUILLON		Biologie Animale P.C.B.
JULLIEN J.		Chimie P.C.B.
MALGRANGE	T	Tech. Math. de la Phys.
OLIVIER		Antropologie
NOZERAN	T	Botanique II (Orsay)

BLANC-LAPIERRE		Physique ENS. (Orsay)
CHEVAUGEON	T	Botanique (Orsay)
KAHANE	T	Mathématiques (Orsay)
SAMUEL	T	Mathématiques ENS féminine
KOURGANOFF	T	Astronomie (Orsay)
THIRY	T	Mécanique céleste

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL R. POULLAIN.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538118_0027

APPLICATIONS DE L'ALGÈBRE DE BOOLE A LA THÉORIE DES GRAPHES ET AUX PROGRAMMES LINÉAIRES ET QUADRATIQUES

Khaled MAGHOUT

AVANT-PROPOS

Je voudrais, avant de commencer, exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur R. FORTET *qui a bien voulu diriger mes recherches, et dont les précieux conseils ont facilité l'élaboration de cette thèse. Je remercie également Monsieur* C. BERGE, *Directeur de Recherches au C.N.R.S., de son aide et de ses conseils qui m'ont été très utiles, ainsi que MM. Les Professeurs* R. DE POSSEL *et* J. VILLE *qui ont bien voulu accepter de faire partie du Jury.*

Sur l'avis favorable de Monsieur le Doyen Durand, la Compagnie IBM-France m'a gracieusement permis de faire des essais sur l'ordinateur IBM 7090. Pour effectuer ces essais, une aide efficace m'a été fournie par MM. F. GENUYS *et* J.M. GAUTHIER *du service des Méthodes et Applications Scientifiques de cette compagnie. Qu'ils veuillent bien tous trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.*

INTRODUCTION

Algèbre de Boole

Sans entrer dans les détails de cette algèbre qui a pris, selon les besoins, plusieurs nominations — algèbre des propositions, algèbre logique, algèbre des classes, algèbre des circuits de commutation, etc ... — je donnerai la définition la plus simple de cette algèbre ainsi que les propriétés qui serviront au cours de ce travail.

L'Algèbre de Boole est un ensemble de deux éléments, que nous noterons par 0 et 1, dans lequel deux opérations que nous appellerons addition booléenne (+) et multiplication (·) sont définies par :

(1) $\quad 1+1=1+0=0+1=1, \qquad 0+0=0$

(1′) $\quad 0\cdot 0=0\cdot 1=1\cdot 0=0, \qquad 1\cdot 1=1.$

Nous dirons que x est une variable booléenne si x ne peut valoir que 0 ou 1. Nous appellerons négation de x, la variable qu'on notera par $\bar{x}$ et qui vaut 0 si $x=1$ et 1 si $x=0$. La négation est donc une opération $(^-)$ dans l'algèbre de Boole définie par :

(2) $\bar{0}=1$
(2′) $\bar{1}=0$

Si a, b, c sont des variables booléennes on peut prouver facilement les propriétés suivantes :

(3) $a \cdot b = b \cdot a$
(3′) $a+b = b+a$

(4) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
(4′) $a+(b+c) = (a+b)+c$

(5) $a(b+c) = ab+ac$
(5′) $a+bc = (a+b)(a+c)$

(6) $\overline{(a \cdot b)} = \bar{a}+\bar{b}$
(6′) $\overline{(a+b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

A partir de ces propriétés principales on peut en trouver plusieurs autres, soit par exemple :

(7) $a+1 = 1$
(7′) $a \cdot 0 = 0$

(8) $a \cdot 1 = a$
(8′) $a+0 = a$

(9) $a+ab = a$
(9′) $a(a+b) = a$

(10) $a+\bar{a}b = a+b$
(10′) $a(\bar{a}+b) = a \cdot b$

Nous remarquons dans cette algèbre son aspect caractéristique de dualité qui se présente, non seulement dans les éléments de l'ensemble $\{0,1\}$, mais aussi dans les opérations définies sur cet ensemble. En effet, l'opération $(\cdot)$ se présente comme la duale de l'opération $(+)$, et c'est ainsi qu'on constate que chaque propriété dans cette algèbre implique sa duale. (Une propriété et sa duale sont notées, dans ce qui précède, par le même chiffre sans et avec prime).

C'est cet aspect de dualité qui a permis à cette algèbre de très importantes applications dans les domaines ayant un aspect alternatif [5].

Je n'entrerai pas dans les détails des définitions des fonctions et des équations booléennes, ni dans les méthodes de résolution des équations booléennes que nous trouvons dans [4], [5], [6], [8] [11], [12], [14], [15]. Je prendrai toujours l'équation booléenne sous la forme :

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1. \tag{11}$$

J'appellerai terme booléen simple une fonction booléenne exprimée uniquement à l'aide des x_j, des $\bar{x}_j$ et de l'opération ($\cdot$). Une forme canonique est un terme simple dans lequel figurent toutes les variables booléennes.

Une tautologie est une fonction booléenne vérifiée par la structure même de la fonction booléenne $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Exemple : $x_1 + \bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 = 1$ est une tautologie car $x_1 + \bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 = x_1 + x_2 + \bar{x}_2 \equiv 1$.

Je considérerai une équation booléenne, mise sous la forme (11), résolue dès que la fonction $f(x_j)$ est exprimée comme la somme de termes simples. En effet, en mettant chacun de ces termes $= 1$ on obtient une famille de vecteurs booléens $v = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$ qui vérifient l'équation. L'ensemble de ces vecteurs constitue la résolution de l'équation booléenne. (Si le terme est une forme canonique il donnera un seul vecteur).

Je citerai deux genres distincts des problèmes booléens.

1. — Résoudre une équation

Ayant un ensemble fini $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, un sous-ensemble quelconque A de S peut être exprimé par une équation booléenne

$$F_A(x_1, x_2, ..., x_n) = 1 \tag{12}$$

où $x_1, x_2, ..., x_n$ sont des variables booléennes associées aux éléments de S, F_A est une forme canonique, telle que la solution de (12) donne

$$x_i = 1 \text{ si et seulement si } s_i \in A.$$

F_A est donc formée des produits de x_i et $\bar{x}_i$ tels que seules les variables correspondant aux éléments de A figurent sans négation. Nous appellerons cette équation booléenne *l'expression booléenne* de A.

Si une condition C peut être exprimée comme une équation booléenne des variables x_i, soit

$$C(x_i) = 1 \tag{13}$$

la résolution de (13) donne alors tous les sous-ensembles de S vérifiant cette condition.

Exemple : Si $n=4$ et si

$$C(x_i) \equiv x_1x_3 + x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_4 + \bar{x}_3\bar{x}_4 = 1$$

le premier terme donne la famille de sous-ensembles :

$$\{s_1, s_3\},\ \{s_1, s_2, s_3\},\ \{s_1, s_3, s_4\},\ \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

le deuxième :

$$\{s_2\},\ \{s_1, s_2\},\ \{s_2, s_4\},\ \{s_1, s_2, s_4\}$$

le troisième :

$$\{s_4\},\ \{s_3, s_4\}$$

le dernier :

$$\{s_1\},\ \{s_2\},\ \{s_1, s_2\},\ \varnothing\,.$$

2. — Prouver une tautologie

C'est un moyen de démonstration. En effet, dire que la condition $C=1$ donne le résultat $R=1$ (C et R étant deux fonctions booléennes), revient à prouver que

$$\overline{C} + R = 1 \qquad \text{est une tautologie.}$$

Si $C=1$ est une condition nécessaire et suffisante pour le résultat $R=1$, cela revient à prouver que

$$(\overline{C} + R)\,(C + \bar{R}) = 1 \qquad \text{est une tautologie.}$$

Ces deux genres de problèmes booléens ne sont pas les seuls. Je citerai, à la fin des applications aux graphes, une mise en forme booléenne du problème des quatre couleurs qui revient au problème booléen suivant :

Prouver que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=1$ a une solution. Ou, en d'autres termes : prouver que $\bar{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ n'est pas une tautologie.

PREMIÈRE PARTIE

APPLICATIONS AUX GRAPHES

CHAPITRE I

ENSEMBLES STABLES, NOYAUX, NOMBRES DE STABILITÉ ET NOMBRE CHROMATIQUE D'UN GRAPHE

1. — Graphes et matrices Booléennes

Appelons matrice booléenne une matrice $n \times n$ dont les éléments sont des nombres booléens.

Un graphe $G = (S, \Gamma)$ est un ensemble $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ et une application Γ de S dans S.

On peut représenter un graphe — pour les applications qui nous intéressent au moins — par une matrice booléenne $A = (a_{ij})$ telle que

$$a_{ij} = 1 \text{ si et seulement si } s_j \in \Gamma s_i \quad \text{où} \quad i = j.$$

Remarquons que cette représentation du graphe reflète toutes les propriétés concernant sa connexité avec les deux exceptions suivantes :

1) Elle ne permet pas d'étudier les particularités des multigraphes (cf. [1], p. 27).

2) Elle ne permet pas de distinguer l'existence des boucles, car $a_{ij} = 1$, si $i = j$.

Mais, à part ces deux restrictions, on peut dire que toutes les caractéristiques d'un graphe fini $G = (S, \Gamma)$ se reflètent dans la matrice booléenne correspondante ainsi définie. Ces matrices booléennes $(n \times n)$, ayant uniquement des 1 sur la diagonale principale, forment un ensemble que nous noterons par Ω. Nous pouvons dire qu'il y a une correspondance bi-univoque entre les graphes finis d'ordre n, sans boucles, et l'ensemble Ω.

2. — Détermination des ensembles extérieurement stables, et du nombre de stabilité externe

Un ensemble extérieurement stable dans un graphe $G = (S, \Gamma)$ est un sous-ensemble P de S tel que, quel que soit $s_i \in S$, on a :

$$(1) \qquad (\{s_i\} \cup \Gamma s_i) \cap P \neq \varnothing .$$

Si $A = (a_{ij})$ est la matrice booléenne de G, et si on associe aux sommets s_i de S les variables booléennes x_i (voir parag. 1 de l'Introduction), la condition (1) nous montre qu'un ensemble extérieurement stable P doit, soit contenir s_i, soit contenir l'un au moins de ses descendants Γs_i. Donc, dans l'expression booléenne de P, la quantité $x_i + \sum_j a_{ij} x_j = \sum_j a_{ij} x_j$ doit être égale à 1, et cela quel que soit i.

La condition (1) devient ainsi la condition booléenne :

$$(2) \qquad C_P \equiv \prod_i \sum_j a_{ij} x_j = 1.$$

La solution de l'équation booléenne (2) donne tous les ensembles extérieurement stables car elle représente la condition nécessaire et suffisante d'un ensemble extérieurement stable.

En développant C_P comme somme de termes simples :

$$C_P = C_P^1 + C_P^2 + \ldots + C_P^h + \ldots$$

en utilisant la propriété (9) de l'algèbre de Boole (citée dans l'introduction), soit : $a + ab = a$, partout où cela est possible, nous remarquons que chacun de ces termes nous donne un ensemble extérieurement stable minimal. En effet, un tel terme ne contient aucune négation. Alors, l'ensemble des sommets s_i dont la variable x_i figure dans ce terme, est un ensemble minimal car, on peut lui ajouter n'importe quels autres sommets, mais on ne pourrait en enlever aucun si on avait utilisé (9). Ainsi nous trouvons facilement tous les ensembles extérieurement stables minimaux.

Le nombre de stabilité externe étant

$$\beta(G) = \min |P|$$

il suffit, pour déterminer ce nombre et l'ensemble extérieurement stable correspondant, de choisir un des plus petits termes dans le

développement de C_P. Nous avons donc :

(2′) $$\beta(G) = \min_h |C_P^h|$$

en désignant par $|C_P^h|$, le nombre des variables figurant dans C_P^h.

Prenons à titre d'exemple le graphe de la figure 4.11, page 42 de l[1]], dont la matrice booléenne est :

$$A = \begin{vmatrix} 1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1&0&1 \end{vmatrix} ;$$

nous voyons que :

$$C_P = \prod_i \sum_j a_{ij} x_i = x_1(x_1+x_2)(x_1+x_3+x_5)(x_2+x_4+x_5)$$
$$(x_2+x_5)(x_2+x_6+x_7)(x_5+x_7)$$
$$= x_1x_2x_5 + x_1x_2x_7 + x_1x_5x_6 + x_1x_5x_7$$

Les ensembles $\{s_1, s_2, s_5\}$, $\{s_1, s_2, s_7\}$, $\{s_1, s_5, s_6\}$, $\{s_1, s_5, s_7\}$ sont tous les ensembles extérieurement stables minimaux du graphe. Le nombre de stabilité externe est :

$$\beta(G) = 3.$$

Remarquons qu'un écrivant C_P nous n'avons fait que suivre la matrice A ligne par ligne. On pouvait aussi exprimer C_P de la façon suivante : en désignant par X le vecteur booléen $\begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$, si $V = A \cdot X = \begin{vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix}$ (Opération matricielle, avec additions et multiplications booléennes), on a : $C_P = \prod_r v_r$.

La condition booléenne (2) qui donne les ensembles extérieurement stables peut s'écrire en notations matricielles :

$$A \cdot X = \vec{1} \text{ avec } \vec{1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}.$$

3. — Détermination des ensembles intérieurement stables et du nombre de stabilité interne

Un ensemble intérieurement stable dans un graphe $G = (S, \Gamma)$ est un sous-ensemble Q de S tel que :

$$Q \cap \Gamma Q = \varnothing . \tag{3}$$

Dans la stabilité interne on peut supposer que le graphe n'a pas de boucles, quitte à enlever tous les sommets avec boucles car ils ne peuvent pas rentrer dans un ensemble intérieurement stable. (Nous n'avons pas fait cette supposition pour la stabilité externe car dans ce cas-là l'existence de boucles n'a aucune importance).

La condition (3) peut s'exprimer de la façon suivante : Dans l'expression booléenne de l'ensemble Q, ou bien $\bar{x}_i = 1$ (s_i n'appartient pas à Q), ou bien

$$(i \neq j), \quad a_{ij} + a_{ji} = 1 \Rightarrow \bar{x}_j = 1 .$$

L'expression booléenne de ce dernier alternatif est :

$$\bar{a}_{ij} \cdot \bar{a}_{ji} + \bar{x}_j = 1 \qquad (i \neq j)$$

Donc, dans l'expression booléenne de Q, la quantité : $(\bar{x}_i + \bar{a}_{ij}\bar{a}_{ji} + \bar{x}_j)$ doit être égale à 1, quels que soient i et j, $(i \neq j)$.

L'expression booléenne de Q est donc :

$$\begin{aligned} C_Q &= \prod_i \prod_{j \neq i} (\bar{x}_i + \bar{a}_{ij}\bar{a}_{ji} + \bar{x}_j) \\ &= \prod_i \prod_{j \neq i} (\bar{x}_i + \bar{a}_{ij} + \bar{x}_j) \\ &= \prod_i \left[\bar{x}_1 + \prod_{j \neq i} (\bar{a}_{ij} + \bar{x}_j) \right] = 1 . \end{aligned} \tag{4}$$

La solution de l'équation booléenne (4) donne tous les ensembles intérieurement stables car elle représente la condition nécessaire et suffisante d'un ensemble intérieurement stable.

En développant C_Q comme somme de termes simples :

$$C_Q = C_Q^1 + C_Q^2 + \ldots + C_Q^r + \ldots ,$$

utilisant également la propriété (9) de l'algèbre de Boole partout où cela est possible, nous remarquons que chacun de ces termes

simples définit un ensemble intérieurement stable maximal. En effet, un tel terme ne contient que des variables en négations. Alors, l'ensemble des sommets s_i, dont la variable booléenne x_i ne figure pas dans ce terme, constitue un ensemble maximal car on peut en enlever n'importe quel sommet ou ensemble de sommets, mais on ne peut rien lui ajouter. Ainsi nous obtenons facilement tous les ensembles intérieurement stables maximaux.

Le nombre de stabilité interne étant défini par :

$$\alpha(G) = \max |Q|$$

il suffit, pour trouver ce nombre et l'ensemble intérieurement stable correspondant, de choisir l'un des plus courts termes dans le développement de C_Q. Nous avons ainsi :

$$\alpha(G) = n - \min_r |C_Q^r| \tag{4'}$$

en désignant par $|C_Q^r|$ le nombre des variables figurant dans C_Q^r.

REMARQUE : Etant donné que l'orientation des arcs du graphe est indifférente, nous pouvons, pour faciliter la formation de l'expression (4), choisir comme matrice booléenne l'une des trois formes suivantes :

1°) A est telle que $a_{ij} \cdot a_{ji} = 0$. Pour arriver à cette forme il suffit d'annuler a_{ij} ou a_{ji} si $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$. C'est le cas, s'il existe un arc allant de s_i à s_j et un autre arc allant de s_j à s_i. On peut en enlever un.

2°) A est symétrique. Pour arriver à cette forme il suffit de mettre $a'_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$ (addition booléenne). Cela revient à doubler chaque arc par un autre arc en sens inverse, s'il n'était pas doublé auparavant.

3°) Remarquons que si une ligne i, de la matrice A, ne contenait des 1 que sur la diagonale principale alors le facteur correspondant à cette ligne dans l'équation (4) sera

$$\bar{x}_i + \prod_{j \neq i} (\bar{a}_{ij} + \bar{x}_j) = \bar{x}_i + 1 = 1.$$

Une telle ligne nous fait l'économie d'un facteur. On peut donc, à partir de la forme symétrique de A, essayer d'enlever des 1 en les remplaçant par 0, afin d'augmenter le nombre de lignes ayant cette propriété.

Pour arriver à ce résultat il suffit de suivre les deux règles

suivantes : a) On ne peut enlever le nombre 1 de la case (i, j) que si $a_{ji} = 1$. b) On n'efface aucun 1 dans une ligne i que si on peut en enlever tous les autres (sauf celui de la diagonale principale).

Ces trois formes de A sont citées dans l'ordre inverse de préférence. La troisième forme est la seule qui présente effectivement une économie de facteurs. La deuxième est préférable à la première car, bien qu'elle augmente le nombre de variables dans chacun des facteurs, la multiplication booléenne manuelle de ces facteurs devient plus facile.

Dans l'exemple précédent, nous ferons les changements suivants dans la matrice A.

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{ccccccc} 1&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&1&1&0\\ 1&0&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&0\\ 0&1&1&1&1&0&1\\ 0&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{ccccccc} 1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&1&1&0\\ 1&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&1&1 \end{array}\right| \begin{array}{c} *\\ \\ \\ *\\ \\ *\\ \\ \end{array}$$

(Les astérisques désignent, dans la 3ème forme, les lignes qui ne donnent pas de facteurs). L'équation (4) devient, à partir de la 3ème forme :

$$C_Q = \prod_i \left[\bar{x}_i + \prod_{j \neq i} (\bar{a}_{ij} + \bar{x}_j) \right]$$

$$= (\bar{x}_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6)(\bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_5)(\bar{x}_5 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_7)(\bar{x}_7 + \bar{x}_5 \bar{x}_6)$$

$$= (\bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \bar{x}_7 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \bar{x}_6 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_7 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_5 \bar{x}_7 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_5 \bar{x}_6 + \bar{x}_1 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6)$$

$$= 1$$

Cette équation nous donne les ensembles intérieurement stables maximaux :

$$\{s_1, s_4, s_6\},\ \{s_1, s_4, s_7\},\ \{s_1, s_5, s_6\}$$
$$\{s_3, s_4, s_6\},\ \{s_3, s_4, s_7\},\ \{s_2, s_3, s_7\}.$$

Le nombre de stabilité interne est :

$$\alpha(G) = n - \min_r |C_Q^r| = 7 - 4 = 3.$$

La condition booléenne (4), qui donne tous les ensembles intérieurement stables, peut s'écrire en notations matricielles :

$\overline{C}_Q \equiv X' \cdot (A - \Delta) \cdot X = 0$ (Opérations matricielles avec additions et multiplications booléennes), avec :

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}, \Delta \text{ matrice unitaire et } X' \text{ le transposé de } X.$$

4. — Détermination des noyaux d'un graphe

Un noyau dans un graphe $G = (S, \Gamma)$ est un sous-ensemble R à la fois intérieurement stable et extérieurement stable. Tout graphe n'admet pas un noyau et, au contraire, un graphe peut en admettre plusieurs [1].

Nous connaissons l'importance des noyaux dans la théorie des jeux sur un graphe. Un choix d'un sommet dans un noyau assure, soit le gain, soit la nullité. Nous supposons également que le graphe est sans boucles. L'expression booléenne d'un noyau est :

$$C_R \equiv C_P \cdot C_Q = 1 \tag{5}$$

si cette équation admet une solution. (Si $C_P \cdot C_Q = 0$ est une tautologie, alors le graphe n'admet pas de noyaux). En remplaçant C_P et C_Q par leurs valeurs on obtient :

$$C_R \equiv \left(\prod_i \sum_j a_{ij} x_j\right)\left(\prod_i \left[\bar{x}_i + \prod_{j \neq i} (\bar{a}_{ij} + \bar{x}_j)\right]\right) \tag{6}$$

$$= \prod_i \left[\bar{x}_i \sum_j a_{ij} x_j + x_i \prod_{j \neq i} (\bar{a}_{ij} + \bar{x}_j)\right] = 1.$$

Il suffit, pour trouver tous les noyaux, de résoudre l'équation booléenne (6). Remarquons que le développement en termes simples de C_R ne donne que des formes canoniques car un terme simple doit contenir soit x_i soit $\bar{x}_i$ quel que soit i comme nous le voyons dans (6). Les solutions de (6), s'il en existe, donneront donc des sous-ensembles bien déterminés, (ni maximaux, ni minimaux). Ces sous-ensembles sont tous les noyaux du graphe.

Le développement de C_R est :

$$C_R = \sum_r \sum_h C_P^h \cdot C_Q^r \tag{7}$$

et puisque C_P^h ne contient que des variables sans négation tandis que C_Q^r ne contient que des variables en négation, alors, dans les termes $C_P^h \cdot C_Q^r$ qui ne s'annulent pas et qui donnent les noyaux, on doit avoir

$$|C_P^h| + |C_Q^r| = n \tag{8}$$

pour que $C_P^h \cdot C_Q^r$ soit une forme canonique. Mais dans ce cas, le noyau $C_P^h \cdot C_Q^r = 1$ est à la fois un ensemble maximal des ensembles intérieurement stables et un ensemble minimal des ensembles extérieurement stables (voir parag. 2 et 3). Et inversement, quand $C_P^h \cdot C_Q^r = 1$, est possible, alors cette dernière équation définit un noyau et la relation (8) est vérifiée. Ceci nous donne le résultat suivant :

(a) Un ensemble $R \subset S$ est un noyau dans un graphe sans boucles si et seulement si R est à la fois un ensemble intérieurement stable maximal, et un ensemble extérieurement stable minimal.

Les relations (2′), (4′) et (8) donnent :

$$n = |C_P^h| + |C_Q^r| \geqslant \beta(G) + n - \alpha(G) ,$$

d'où le résultat :

(b) Si un graphe admet un noyau, on a : $\alpha(G) \geqslant \beta(G)$.

La démonstration graphique des deux résultats (a) et (b) est très facile, mais je les cite pour montrer l'éloquence du langage booléen dans ce domaine.

Reprenons le graphe de notre exemple précédent, pour y chercher les noyaux. L'équation (5) devient (en profitant des résultats précédents pour C_P et C_Q) :

$$\begin{aligned} C_R \equiv\ & (\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_5\bar{x}_7 + \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_5\bar{x}_6 + \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_7 \\ & + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_5\bar{x}_7 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_5\bar{x}_6 + \bar{x}_1\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6) \\ & \times (x_1x_2x_5 + x_1x_2x_7 + x_1x_5x_6 + x_1x_5x_7) \\ =\ & x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5x_6\bar{x}_7 = 1 \end{aligned}$$

Le seul noyau dans ce graphe est

$$\{s_1, s_5, s_6\}.$$

5. — Nombre chromatique

Le nombre chromatique d'un graphe $G = (S, \Gamma)$ est le nombre minimum de couleurs avec lesquelles on peut colorier les sommets s_i du graphe de telle façon que deux sommets ayant la même couleur ne soient pas adjacents. Les sommets coloriés par la même couleur constituent un ensemble intérieurement stable et nous pouvons définir le nombre chromatique comme étant le nombre minimum d'ensembles intérieurement stables couvrant le graphe. Et puisque $C_Q = 1$ nous donne tous les ensembles intérieurement stables (car à partir des ensembles maximaux on peut en avoir tous les autres), il faut, pour colorier un sommet s_i, choisir l'un des termes C_Q^r qui ne contiennent pas $\bar{x}_i$, (un tel terme définit les ensembles intérieurement stables qui peuvent contenir s_i). Si nous définissons maintenant les variables booléennes y_r, valant 1 si un ensemble de la famille défini par $C_Q^r = 1$ est choisi pour avoir une même couleur, et 0 dans le cas contraire, et si R_i est l'ensemble des indices r tels que $C_Q^r \not\ni \bar{x}_i$, alors pour colorier s_i il faut :

$$\sum_{r \in R_i} y_r = 1$$

et cela quel que soit i. La condition nécessaire et suffisante pour une coloration du graphe est :

$$C \equiv \prod_i \sum_{r \in R_i} y_r = 1 . \tag{9}$$

Si on désigne par E_r l'ensemble intérieurement stable maximal défini par $C_Q^r = 1$, alors un terme simple de (9), soit

$$y_{k_1} y_{k_2} y_{k_3} \cdots y_{k_p},$$

doit être interprété de la façon suivante :

On peut colorier le graphe avec p couleurs en coloriant l'ensemble E_{k_1} avec la couleur 1, l'ensemble $E_{k_2} - E_{k_1}$ avec la couleur 2, l'ensemble $E_{k_3} - E_{k_2} - E_{k_1}$ avec la couleur 3 et ainsi de suite.

Si le développement de C comme somme de termes simples est :

$$C \equiv C^1 + C^2 + \ldots + C^m + \ldots \tag{10}$$

alors le nombre chromatique est

$$\gamma(G) = \min_m |C^m|.$$

Dans notre exemple précédent nous avions

$$C_Q = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_5\bar{x}_7 + \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_5\bar{x}_6 + \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_7 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_5\bar{x}_7 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_5\bar{x}_6 + \bar{x}_1\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6$$
$$= C_Q^1 + C_Q^2 + C_Q^3 + C_Q^4 + C_Q^5 + C_Q^6$$

L'expression (9) est donc :

$$C \equiv (y_1 + y_2 + y_3) \cdot y_6 \cdot (y_4 + y_5 + y_6) \cdot (y_1 + y_2 + y_4 + y_5) \cdot y_3 \cdot (y_1 + y_3 + y_4)(y_2 + y_5 + y_6)$$
$$= y_3 \cdot y_6 \cdot (y_1 + y_2 + y_4 + y_5) = 1.$$

Le nombre chromatique est :

$$\gamma(G) = 3.$$

6. **Application au couplage d'un graphe**

Soit le graphe $G = (S, \Gamma)$ que nous considérons comme non orienté. Notons par $U = \{u_1, u_2, ...,\}$ l'ensemble des arêtes de G. Un couplage de G est un ensemble $C \subset U$ tel que :

$$u_i, u_j \in C \Rightarrow u_i \text{ et } u_j \text{ sont non adjacentes.}$$

Le problème se pose pour trouver un couplage contenant un nombre maximum d'arêtes. On peut ramener ce problème à la recherche d'un ensemble intérieurement stable maximum en définissant, à partir de G, le graphe symétrique $G' = (U, \Gamma')$ avec $u_i \in \Gamma' u_j$ si, et seulement si, u_i et u_j sont adjacentes dans G.

Un ensemble intérieurement stable quelconque dans G' correspond biunivoquement à un couplage du graphe G et un ensemble intérieurement stable maximum dans G' définit un couplage maximum dans G.

7. **Conclusion**

Nous avons donné dans ce chapitre un moyen algébrique très simple pour trouver les ensembles stables et les noyaux, et pour

déterminer les nombres de stabilité et le nombre chromatique. Ces ensembles et ces nombres sont importants dans des problèmes de recherche opérationnelle [1], et la méthode présentée ici est, à ma connaissance, la seule méthode systématique capable de les déterminer.

Il existe un algorithme pour trouver un ensemble extérieurement stable minimum [1], mais il n'est pas systématique dans ce sens qu'il est le résultat d'un tâtonnement, bien que ce tâtonnement soit méthodique. Cet algorithme est inabordable quand le nombre des sommets devient assez grand. Il existe aussi un algorithme pour la détermination d'un ensemble intérieurement stable dans des cas particuliers [1]. Cet algorithme se base sur la détermination d'un couplage maximum dans le graphe. Mais l'algorithme pour la détermination d'un couplage maximum n'est pas non plus systématique et il est inabordable quand le nombre des sommets devient assez grand pour les mêmes raisons précédentes. Je pense, au contraire, qu'il vaut mieux déterminer les couplages maximums à partir de la détermination des ensembles intérieurement stables (ce que j'ai présenté dans le parag. 6) étant donnée la facilité de la détermination de ces derniers.

CHAPITRE II

CONNEXITÉ D'UN GRAPHE

Nous avons vu dans le premier paragraphe du chapitre précédent que l'ensemble Ω des matrices booléennes représente l'ensemble des graphes d'ordre n en tout ce qui concerne leur connexité. Nous allons continuer à tirer parti de ce fait pour étudier tous les problèmes concernant les chemins dans un graphe. Nous prendrons toujours des graphes orientés car une arête non orientée peut être remplacée par deux arcs.

1. — Opérations sur l'ensemble Ω des matrices Booléennes

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices booléennes de Ω. Définissons sur cet ensemble les opérations suivantes :

a) Produit booléen matriciel ($\cdot$) défini par :

$$A \cdot B = C = (c_{ij}) \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

(sommation et multiplication booléennes).

C'est une opération interne dans Ω car si A et $B \in \Omega$, alors $C \in \Omega$. En effet C est de dimension $n \times n$, et

$$c_{ii} = \sum_k a_{ik} b_{ki} = a_{ii} b_{ii} + \ldots = 1 + \ldots = 1$$

Nous pouvons prouver facilement que cette opération est associative. Nous pouvons donc définir la «puissance booléenne» de la matrice $A \in \Omega$ soit :

$$A^r = A \cdot A \cdot A \ldots A \qquad (r \text{ fois}). \tag{2}$$

Si on note par $A \supset B$ (A contient B) le fait que : $a_{ij} \geqslant b_{ij}$ quels que soient i et j (ou $a_{ij} = 0 \rightarrow b_{ij} = 0$) nous pouvons prouver que :

$$A \cdot B \supset A \text{ et } A \cdot B \supset B. \tag{3}$$

En effet, si $A \cdot B = C$ on a :

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = a_{ii} b_{ij} + a_{ij} b_{jj} + \ldots$$

$$= a_{ij} + b_{ij} + \ldots \geqslant a_{ij} \text{ et } \geqslant b_{ij}.$$

b) Produit booléen simple ($\dot{\times}$) défini par :

$$A \dot{\times} B = C \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} b_{ij}. \tag{4}$$

Cette opération est également interne dans Ω.
$A \in \Omega$, $B \in \Omega \Rightarrow C \in \Omega$, car C est de dimension $n \times n$ et $c_{ii} = a_{ii} \cdot b_{ii} = 1$. Elle est également associative et commutative, et on a :

$$A \dot{\times} B \subset A \quad \text{et} \quad A \dot{\times} B \subset B. \tag{5}$$

Cette opération a la propriété $A \dot{\times} A = A$ qui rend inutile une définition de puissance.

Nous verrons que ces deux opérations faciles sont très utiles pour tout ce qui concerne les chemins dans un graphe.

Notons enfin par E la matrice $E = (e_{ij})$, $e_{ij} = 1$ quels que soient i et j, et par Δ la matrice $\Delta = (\delta_{ij})$, $\delta_{ij} = 1$ si et seulement si $i = j$. Ces deux matrices ont les propriétés suivantes :

$$\Delta \cdot A = A \cdot \Delta = A \tag{6}$$
$$E \dot{\times} A = A \dot{\times} E = A \tag{6'}$$
$$E \cdot A = A \cdot E = E \tag{7}$$
$$\Delta \dot{\times} A = A \dot{\times} \Delta = \Delta. \tag{7'}$$

En accord avec la propriété (6), et le fait que

$$A^0 \cdot A^r = A^r$$

nous mettrons :

$$A^0 = \Delta \quad \text{quel que soit } A \in \Omega. \tag{8}$$

Nous dirons que la ligne i de la matrice A est pleine si $a_{ij} = 1$ quel que soit j.

Dans les paragraphes suivants nous noterons par $A = (a_{ij})$ une matrice de Ω, correspondant à un graphe $G = (S, \Gamma)$, et par $A^r = (a_{ij}^{(r)})$ sa puissance r-ième booléenne.

2. — Chemins et écarts entre sommets. Fermeture transitive d'un graphe G = (S, Γ) (ou de l'application Γ)

THÉORÈME 1 — Dans les puissances booléennes successives de A on a $a_{ij}^{(r)} = 1$, si, et seulement si, il existe un chemin de longueur $\leqslant r$ qui mène de s_i à s_j.

En effet, on a :

$$a_{ij}^{(r)} = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_{r-1}} a_{ik_1} \cdot a_{k_1 k_2} \dots a_{k_{r-1} j}$$

$a_{ij}^{(r)} = 1 \Leftrightarrow$ il existe $k_1^0, k_2^0, k_3^0, \dots, k_{r-1}^0$ tels que :

$$a_{ik_1^0} = a_{k_1^0 k_2^0} = \dots = a_{k_{r-1}^0 j} = 1 .$$

Il existe donc un chemin qui mène de s_i à s_j de longueur r si tous les k^0 sont différents, et de longueur $< r$ si les k^0 ne sont pas tous différents.

L'écart $d(s_i, s_j)$ étant la longueur du plus court chemin menant de s_i à s_j, avec $d(s_i, s_j) = \infty$ s'il n'y a pas de tels chemins, nous avons le résultat suivant :

Corollaire : Si r est la plus petite puissance booléenne pour laquelle $a_{ij}^{(r)} = 1$, alors r est égal à l'écart $d(s_i, s_j)$. (Immédiat).

La relation (8) soit $A^0 = \Delta$ nous donne ainsi : $d(s_i, s_i) = 0$ quel que soit i en accord avec le sens topologique de distance.

THÉORÈME 2 — Toute matrice booléenne $A \in \Omega$ converge en ses puissances booléennes successives vers sa fermeture transitive $\hat{A}$ qui correspond à la fermeture transitive $\hat{G}$ du graphe G correspondant à A.

En effet, on ne peut pas avoir entre deux sommets quelconques un écart fini supérieur à $n - 1$, donc, d'après le corollaire précédent et la propriété (3) de la multiplication booléenne matricielle on a :

$$A^0 \subset A^1 \subset A^2 \subset \dots \subset A^{n-1} = A^n = \dots = \hat{A} .$$

Dans $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$ on a $\hat{a}_{ij} = 1$ si, et seulement si, il existe un chemin qui mène de s_i à s_j, ce qui est par définition la fermeture transitive $\hat{G} = (S, \hat{\Gamma})$ de $G = (S, \Gamma)$, (ou simplement de l'application Γ).

Ces deux théorèmes nous donnent un moyen algébrique simple permettant d'étudier les chemins entre sommets et de trouver la fermeture transitive d'un graphe. En effet, au lieu de calculer les puissances booléennes successives de A, il suffit d'effectuer des opérations de quadratures successives pour calculer

$$A^2, A^4, A^8, A^{16}, \dots, A^{2^r}$$

qui permettent de trouver la fermeture transitive $\hat{A}$ à l'aide de

p opérations de quadrature, au maximum, p étant défini par :

(9) p est le plus petit entier tel que $2^p \geqslant n-1$.

Les mêmes opérations de quadrature permettront de trouver facilement les écarts entre sommets, car si $\hat{a}_{ij} = 0$ alors $d(s_i,s_j) = \infty$ et si $\hat{a}_{ij} = 1$ alors les quadratures successives nous localisent l'intervalle où se trouve $d(s_i, s_j)$. En effet, si

$$a_{ij}^{(2^r)} = 0 \text{ et } a_{ij}^{(2^{r+1})} = 1$$

nous saurons que $2^r < d(s_i, s_j) \leqslant 2^{r+1}$, et il suffit d'inspecter cet intervalle en le divisant successivement au milieu, localisant de proche en proche l'écart dans des intervalles plus petits, jusqu'au moment où nous aurons $a_{ij}^{(l-1)} = 0$, $a_{ij}^{(l)} = 1$, d'où $d(s_i, s_j) = 1$.

Il suffit seulement de calculer a_{ij} dans ces étapes intermédiaires. On peut effectuer cette inspection avec au maximum r multiplications booléennes matricielles supplémentaires. Donc, pour trouver un écart quelconque on a besoin de $2p$ opérations au maximum, p étant défini par (9).

Exemple :

Pour $n = 100$, $p = 7$ opérations de quadrature suffisent pour trouver la fermeture transitive, et $2p = 14$ opérations suffisent pour trouver n'importe quel écart, et cela quel que soit le graphe (d'ordre 100).

Evidemment, il n'est pas nécessaire d'atteindre la puissance booléenne $n-1$; il suffit pour s'arrêter d'avoir $A^h = A^{h+1}$ car à partir de cette opération on aura $A^h = A^{h+1} = ... = \hat{A}$. Nous appellerons la plus petite puissance h pour laquelle $A^h = \hat{A}$, *la puissance de la fermeture transitive de* A, (ou de son graphe G).

3. — Écartement des sommets, centres et rayons d'un graphe

L'écartement $e(s_i)$ d'un sommet s_i du graphe G est :

$$e(s_i) = \max_{s \in S} d(s_i, s).$$

THÉORÈME 3 — L'écartement d'un sommet s_i est infini si, et seulement si, la ligne i dans $\hat{A}$ n'est pas pleine. Dans le cas contraire, l'écartement de ce sommet est égal à la plus petite puissance booléenne qui rende la ligne i pleine. (Immédiat).

Pour calculer l'écartement d'un sommet quelconque $2p$ opérations, au maximum, suffisent, p défini par (9). On peut mettre ce théorème sous la forme suivante :

L'écartement d'un sommet s_i est infini si, et seulement si, $\prod_j \hat{a}_{ij} = 0$; sinon, l'écartement de ce sommet est égal à la plus petite puissance booléenne r pour laquelle : $\prod_j a_{ij}^{(r)} = 1$.

Un *centre* est un sommet s_i tel que : $e(s_i) = \min_{s \in S} e(s) = \rho$ si cet écartement est fini. L'écartement ρ d'un centre est le *rayon* du graphe.

Corollaire 1 — Le graphe $G = (S, \Gamma)$ de matrice $A \in \Omega$ admet un centre si, et seulement si, dans la fermeture transitive $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$, on a :

$$\sum_i \prod_j \hat{a}_{ij} = 1. \tag{10}$$

En effet, la relation (10) exprime l'existence d'une ligne pleine dans $\hat{A}$, ce qui est, d'après le théorème 3, la condition nécessaire et suffisante de l'existence de sommets d'écartement fini, donc de l'existence d'un centre.

Corollaire 2 — Le sommet s_i est un centre si, et seulement si, la ligne i est la première à devenir pleine dans les opérations de puissances booléennes successives A^r. La plus petite puissance qui rende la ligne (i) pleine est égale au rayon ρ du graphe. Le rayon ρ du graphe est donc égal à la plus petite puissance r pour laquelle :

$$\sum_i \prod_j a_{ij}^{(r)} = 1. \qquad \text{(Immédiat).}$$

La détermination de tous les centres et du rayon demande, comme les écarts et les écartements, au maximum, $2p$ multiplications booléennes matricielles [p défini par (9)].

4. — Connexité forte, diamètre et points périphériques d'un graphe

Un *point périphérique* dans un graphe $G = (S, \Gamma)$ est un sommet s_i tel que $e(s_i) = \max_{s \in S} e(s) = \delta$. L'écartement δ d'un

point périphérique est le *diamètre* du graphe. Un graphe est fortement connexe s'il existe un chemin menant de s_i à s_j quels que soient s_i, $s_j \in S$, c'est-à-dire si δ est fini.

THÉORÈME 4 — Un graphe G de matrice booléenne $A \in \Omega$ est fortement connexe si, et seulement si, $\hat{A} = E$. (Rappelons que $E = (e_{ij})$, $e_{ij} = 1$ quels que soient i et j). (Immédiat d'après le Th. 3).

Corollaire : Dans un graphe fortement connexe le diamètre δ est égal à la puissance h de la fermeture transitive. Les points périphériques correspondent aux dernières lignes devenues pleines dans les opérations de puissances booléennes successives A^r. Si le graphe n'est pas fortement connexe $\hat{A} \neq E$ alors $\delta = \infty$ et les points périphériques sont ceux qui correspondent aux lignes non pleines de $\hat{A}$ (Immédiat).

Pour trouver la puissance de la fermeture transitive, donc pour trouver δ et les points périphériques, $2p$ multiplications booléennes matricielles suffisent, p étant défini par (9).

5. — Circuits et composantes fortement connexes d'un graphe

Désignons par A′ la transposée de la matrice booléenne A.

THÉORÈME 5 — Soit $B = (b_{ij}) \in \Omega$ la matrice symétrique $B = \hat{A} \times \hat{A}'$. Il existe un circuit passant par les sommets s_i, s_j ($s_i \neq s_j$) si et seulement si $b_{ij} = 1$.

En effet, nous avons :

$$b_{ij} = \hat{a}_{ij} \cdot \hat{a}_{ji}$$

alors, si $b_{ij} = 1$ on a $\hat{a}_{ij} = \hat{a}_{ji} = 1$. Il existe donc un chemin qui mène de s_i à s_j et un autre qui mène de s_j à s_i (Th. 2). Il existe donc un circuit — pas nécessairement simple — qui passe par s_i et s_j.

Corollaire 1 : Le graphe G de matrice booléenne A est sans circuit si, et seulement si

$$B = \hat{A} \times \hat{A}' = \Delta.$$

(Rappelons que $\Delta = (\delta_{ij})$, $\delta_{ij} = 1$ si, et seulement si $i = j$, sinon $\delta_{ij} = 0$).

Corollaire 2 : La composante fortement connexe du sommet s_i est constituée par les sommets s_j tels que $b_{ij} = 1$.

Nous pouvons aussi détecter l'existence des circuits de longueur déterminée quelconque. Si l'on considère, pour deux matrices booléennes A et B de Ω, l'addition suivante :

$$A + B = C \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{(addition booléenne)}$$

nous aurons :

THÉORÈME 6 : Si

$$B^{(l)} = \sum_{r=1}^{l-1} (A^{l-r}) \dot{\times} (A^r)' = (b_{ij}^{(l)})$$

on a $b_{ij}^{(l)} = 1$ si, et seulement si, il existe un circuit de longueur $\leqslant l$ passant par les deux sommets s_i et s_j.

En effet, on a :

$$b_{ij}^{(l)} = 1 \Leftrightarrow \text{il existe } r_0 \text{ tel que :}$$

$$a_{ij}^{(l-r_0)} \cdot a_{ji}^{(r_0)} = 1,$$

c'est-à-dire qu'il existe un chemin qui mène de s_i à s_j de longueur $\leqslant l - r_0$, et un autre chemin qui mène de s_j à s_i de longueur $\leqslant r_0 \cdot s_i$ et s_j se trouvent donc sur un circuit de longueur $\leqslant l$. Ce circuit n'est pas nécessairement simple.

Prenons à titre d'exemple, le graphe de la figure 12-1, page 117 de [1], qui est le suivant :

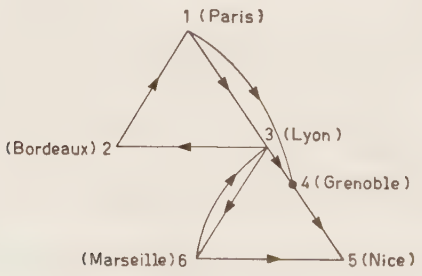


Fig. A

Nous avons :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad A^3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^4 = A^3 = \hat{A}$$

$$\hat{A} \dot{\times} \hat{A}' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ces opérations donnent, sur le graphe, les informations suivantes :

1°) Ce graphe n'est pas fortement connexe car $\hat{A} \neq E$.
Son diamètre est $\delta = \infty$.

2°) Les sommets x_1 et x_3 sont deux centres. Le rayon est $\rho = 2$.

3°) Les écartements des sommets x_2, x_6 sont

$$e(x_2) = e(x_6) = 3.$$

4°) Les écartements des autres sommets sont infinis. Ce sont les points périphériques.

5°) Il existe des circuits passant par $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_1, x_6\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_2, x_6\}$, $\{x_3, x_6\}$.

6°) Les composants fortement connexes de ce graphe sont : $\{x_1, x_2, x_3, x_6\}$, $\{x_4\}$, $\{x_5\}$.

6. — Conclusions

Nous avons vu dans ce chapitre que la méthode des puissances booléennes successives, appliquées sur l'ensemble spécial Ω des matrices booléennes, constitue un moyen algébrique très simple permettant de trouver la *fermeture transitive* d'une application Γ [ou d'un graphe $G = (S, \Gamma)$] et de tester la *connexité forte* d'un graphe. Elle constitue aussi un moyen algébrique très simple — le seul moyen systématique à ma connaissance — pour calculer les *écarts entre sommets*, *l'écartement des sommets*, le *rayon* et le *diamètre* et pour déterminer les *centres* et les *points périphériques* dans un graphe. Complétée par la multiplication booléenne simple ($\dot{\times}$), cette méthode nous permet de détecter les *circuits* et les *composantes fortement connexes*.

J'ajouterai que les méthodes purement algébriques données dans les chapitres I et II permettent l'utilisation des machines électroniques. Nous pouvons ainsi aborder des problèmes d'ordre assez élevé.

CHAPITRE III

APPLICATIONS À LA THÉORIE DES GRAPHES

1. — Graphes (p, q) – totaux

Dans ce chapitre, nous aurons besoin de l'utilisation du deuxième genre des problèmes booléens (voir page 4). C'est-à-dire nous utiliserons l'algèbre de Boole comme moyen de démonstration de théorèmes.

Je prendrai d'abord le théorème 3 page 118 de [1], qui est le suivant :

THÉORÈME INITIAL : Si un graphe fini (S, Γ) est complet (c'est-à-dire si tout couple de sommets est relié dans au moins une des directions), son rayon ρ est ⩽ 2; en outre, tout sommet tel que

$$|\Gamma s_0 - \{s_0\}| = \max_{s \in S} |\Gamma s - \{s\}|, \text{ est un centre.}$$

Ce théorème, à part la détermination du centre, équivaut, en langage booléen, au problème suivant :

Si $A = (a_{ij}) \in \Omega$ est la matrice booléenne correspondant au graphe G, on a :

— Un graphe complet $\Leftrightarrow C \equiv \prod_i \prod_j (a_{ij} + a_{ji}) = 1$

— Son rayon est $\leqslant 2 \Leftrightarrow R \equiv \sum_i \prod_j a_{ij}^{(2)}$

$$\equiv \sum_i \prod_j \sum_k a_{ik} a_{kj} = 1$$

— Le théorème initial $\Leftrightarrow (C = 1 \Rightarrow R = 1) \Leftrightarrow$ l'équation booléenne $T \equiv \overline{C} + R = 1$ est une tautologie. Ou plus explicitement

$$(1) \qquad T \equiv \sum_i \sum_j \bar{a}_{ij} \bar{a}_{ji} + \sum_i \prod_j \sum_k a_{ik} a_{kj} = 1$$

est une tautologie.

Nous pouvons facilement démontrer ce théorème d'une façon booléenne simple.

Mais nous pouvons prouver le théorème booléen suivant, qui est plus général :

THÉORÈME 1 — L'équation booléenne :

$$(2)\quad T_1 \equiv \sum_i \sum_j (\bar{a}_{ij}\bar{b}_{ji} + \bar{a}_{ii} + \bar{b}_{jj}) + \sum_i \prod_j \sum_k a_{ik}b_{kj} = 1$$

est une tautologie.

Démonstration

$$T_1 \equiv \sum_i \sum_j (\bar{a}_{ij}\bar{b}_{ji} + \bar{a}_{ii} + \bar{b}_{jj}) + \sum_i \left(\min_j \sum_k a_{ik}b_{kj}\right)$$

$$= \quad » \quad + \sum_i \sum_k a_{ik}b_{kj_i}$$

$$\geqslant \quad » \quad + \sum_k (a_{i_1k}.b_{ki_2} + a_{i_2k}b_{ki_3} + \ldots +$$

$$+ a_{i_rk}b_{ki_{r+1}} + \ldots + a_{i_sk}b_{ki_r})$$

(Nous arrivons à cette dernière forme en commençant par un indice i_1 quelconque et en mettant i_2 à la place de j_{i_1} et ainsi de suite. Nous retrouvons à la fin de la dernière sommation un indice i_r déjà rencontré car le graphe est fini).

$$T_1 \geqslant \bar{a}_{i_ri_r} + \bar{b}_{i_ri_r} + \bar{a}_{i_{r+1}i_r} \cdot \bar{b}_{i_ri_{r+1}} + a_{i_{r+2}i_r} \cdot \bar{b}_{i_ri_{r+2}} + \ldots +$$

$$+ \bar{a}_{i_si_r} \cdot \bar{b}_{i_ri_s} + a_{i_ri_r} \cdot b_{i_ri_{r+1}} + a_{i_{r+1}i_r} \cdot b_{i_ri_{r+2}} + \ldots + a_{i_si_r} \cdot b_{i_ri_r}$$

$$\geqslant \bar{b}_{i_ri_r} + b_{i_ri_r} = 1.$$

(Les dernières éliminations sont dues à la propriété booléenne : $\bar{a} + ab = \bar{a} + b$).

Donc $T_1 = 1$ est une tautologie. On mettra $T_1 \equiv 1$ pour dire que c'est une tautologie.

Ce théorème en langage booléen nous permet de donner, comme généralisation du théorème initial, le théorème suivant :

THÉORÈME (1') : Un graphe fini a un rayon $\rho \leqslant p + q$ si, pour deux sommets s_i, s_j, on a :

$$d(s_i, s_j) \leqslant p \quad \text{ou} \quad d(s_j, s_i) \leqslant q.$$

Démonstration : Si on met dans le théorème booléen (1) $a_{ij}^{(p)}$ au lieu de a_{ij} et $a_{ij}^{(q)}$ au lieu de b_{ij}, ($a_{ij}^{(p)}$ étant l'élément (i, j) de la matrice booléenne A^p, et $a_{ij}^{(q)}$ celui de la matrice booléenne A^q), ce théorème devient :

$$(3) \qquad T_1 \equiv \sum_i \sum_j (\bar{a}_{ij}^{(p)} \cdot \bar{a}_{ji}^{(q)} + \bar{a}_{ii}^{(p)} + \bar{a}_{jj}^{(q)}) + \sum_i \prod_j \sum_k a_{ik}^{(p)} \cdot a_{kj}^{(q)} \equiv 1$$

Cela veut dire que :

$$C = \prod_i \prod_j (a_{ij}^{(p)} + a_{ji}^{(q)})\, a_{ii}^{(p)} \cdot a_{jj}^{(q)} = 1 \Rightarrow$$

$$R = \sum_i \prod_j \sum_k a_{ik}^{(p)} \cdot a_{kj}^{(q)} = \sum_i \prod_j a_{ij}^{(p+q)} = 1.$$

Mais $C = 1$ équivaut : $a_{ij}^{(p)} + a_{ji}^{(q)} = 1$ quels que soient i, j; (car $a_{ii}^{(p)} = a_{jj}^{(q)} = 1$ d'après la définition de l'ensemble Ω des matrices booléennes). Et cela équivaut à son tour : $d(s_i, s_j) \leqslant p$ ou $d(s_j, s_i) \leqslant q$, (voir théorème 1, chapitre II).

$R = 1$ équivaut : le graphe a un rayon $\rho \leqslant p + q$ (voir théorème 3, chapitre II et ses corollaires). Le théorème booléen $T_1 = 1$ sous la forme (3) équivaut donc l'énoncé du théorème (1').

Pour un graphe complet on a $\prod_i \prod_j (a_{ij} + a_{ji}) a_{ii} a_{jj} = 1$ d'où $p = q = 1$. D'après ce théorème un tel graphe doit avoir un rayon $\rho \leqslant 1 + 1 = 2$. On retrouve ainsi le théorème initial, à part la démonstration des centres.

Un graphe $G = (S, \Gamma)$ est appelé total si $d(s_i, s_j) < \infty$ ou $d(s_j, s_i) < \infty$ quels que soient $s_i, s_j \in S$.

Soit $A = (a_{ij})$ la matrice booléenne du graphe G. D'après le théorème 1, chapitre II, nous pouvons donner aux graphes totaux la définition suivante :

Un graphe est total si, et seulement si

$$(4) \qquad \hat{A} + \hat{A}' = E.$$

(L'addition des matrices booléennes est définie au paragraphe 5, chapitre II).

La condition (4) nous donne un test très simple pour savoir si

un graphe est total, étant donné la facilité de trouver $\hat{A}$ (voir chapitre II).

Les graphes qui vérifient les conditions du théorème (1') sont ceux qui vérifient :

$$(A^p) + (A^q)' = E. \tag{5}$$

Ils vérifient donc (4) et ils sont totaux. Nous les appellerons des graphes (p, q)-totaux. Un graphe (p, q)-total est également (q, p)-total, à cause de la symétrie de (5). Théorème (1') devient :

Un graphe (p, q)-total a un rayon $\rho \leqslant p+q$.

Quand (4) est vérifiée, les opérations des puissances booléennes successives nous permettent de trouver p et q pour lesquelles (5) est vérifiée.

Si $p < q$, la propriété (p, q)-total veut dire que pour deux sommets quelconques s_i, s_j du graphe on a au moins l'une des alternatives suivantes :

1°) $d(s_i, s_j) \leqslant p\ (< q)$ (Car cela donne : $a_{ij}^{(p)} + a_{ji}^{(q)} = a_{ij}^{(q)} + a_{ji}^{(p)} = 1$)

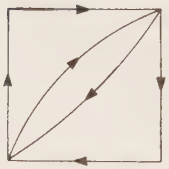
2°) $d(s_j, s_i) \leqslant p\ (< q)$ (pour la même raison)

3°) $d(s_i, s_j) \leqslant q$ et $d(s_j, s_i) \leqslant q$.

Dans la troisième alternative $d(s_i, s_j) \leqslant q$ ne suffit pas, car si $p < d(s_i, s_j) \leqslant q$ et $p < q < d(s_j, s_i)$ nous aurons : $a_{ij}^{(p)} + a_{ij}^{(q)} = 0$.

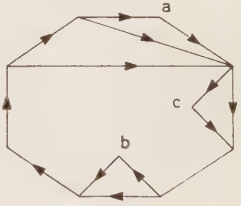
Pour donner une idée des graphes (p, q)-totaux remarquons qu'un graphe complet est un graphe (1, 1)-total. Un graphe complet et symétrique est (0, 1)-total, $(A^0 = \Delta = (\delta_{ij}))$.

Les figures suivantes nous montrent quelques exemples des graphes totaux :



(0,2)-total, $\rho=2$
Fig. 1

(1,2)-total, $\rho=3$
Fig. 2



(2,5)-total, $\rho=5$
Fig. 3

Nous pouvons même généraliser le théorème 1, en prouvant :

THÉORÈME 2 — L'équation booléenne :

$$(6)\qquad T_2 \equiv \sum_i \sum_j (\bar{a}_{ij}\bar{b}_{ji} + \bar{a}_{ii} + \bar{b}_{jj}) + \sum_i \prod_j b_{ij} + \sum_i \left(\bar{b}_{i_0 i} \prod_j \sum_k a_{ik} b_{kj} \right) = 1$$

est une tautologie.

(C'est une généralisation du théorème $T_1 \equiv 1$ car $T_1 \geqslant T_2$. En effet :

$$\sum_i \prod_j \sum_k a_{ik} b_{kj} \geqslant \sum_i \prod_j b_{ij} \qquad (\text{car } a_{ii} = 1)$$

et

$$\prod_i \sum_k a_{ik} b_{kj} \geqslant \bar{b}_{i_0 i} \prod_j \sum_k a_{ik} b_{kj}.$$

Démonstration :

$$T_2 \geqslant b_{i_0 i_1} + \sum_i \sum_j (\bar{a}_{ij}\bar{b}_{ji} + \bar{a}_{ii} + \bar{b}_{jj}) + \sum_{h=1}^{n} \bar{b}_{i_0 i_h} \sum_k a_{i_h k} \cdot b_{k i_{h+1}}$$

[Comme dans la démonstration du th. 1, on a pris :

$$b_{i_0 i_1} = \min_j b_{i_0 j} \quad \text{et} \quad \sum_k a_{i_h k} b_{k i_{h+1}} = \min_j \sum_k a_{i_h k} b_{kj}]$$

$$\geqslant b_{i_0 i_1} + \sum_i (\bar{a}_{ii} + \bar{b}_{ii}) + \sum_h \sum_k (\bar{a}_{i_h k} \cdot \bar{b}_{k i_h} + \bar{b}_{i_0 i_h} \cdot b_{i_0 i_{h+1}} a_{i_h i_0} + \bar{b}_{i_0 i_h} a_{i_h k} b_{k i_{h+1}})$$

$$\geqslant \quad » \quad » \quad + \sum_h \sum_k (b_{i_0 i_{h+1}} + a_{i_h k} b_{k i_{h+1}} + \bar{b}_{k i_h} \cdot b_{k i_{h+1}}) \bar{b}_{i_0 i_h}$$

[On a le dernier terme, car

$$\bar{a}_{i_h k}\bar{b}_{k i_h} + a_{i_h k}\bar{b}_{i_0 i_h} \cdot b_{k i_{h+1}} \geqslant \bar{b}_{i_0 i_h}\bar{b}_{k i_h} b_{k i_{h+1}}$$

d'après la propriété booléenne :

$$\bar{a}b + ac = \bar{a}b + ac + bc \geqslant bc].$$

$$\geqslant b_{i_0 i_1} + \sum_i (\bar{a}_{ii} + \bar{b}_{ii}) + \sum_k [\bar{b}_{i_0 i_1} (b_{i_0 i_2} + a_{i_1 k} b_{k i_2} + \bar{b}_{k i_1} b_{k i_2})$$

$$+ \bar{b}_{i_0 i_2}(b_{i_0 i_3} + a_{i_2 k} b_{k i_3} + \bar{b}_{k i_2} b_{k i_3})$$
$$+ \ldots$$
$$+ \bar{b}_{i_0 i_r}(b_{i_0 i_{r+1}} + a_{i_r k} b_{k i_{r+1}} + \bar{b}_{k i_r} b_{k i_{r+1}})$$
$$+ \ldots$$
$$+ b_{i_0 i_s}(b_{i_0 i_r} + a_{i_s k} b_{k i_r} + \bar{b}_{k i_s} b_{k i_r})]$$

[Nous retrouverons un indice i_r utilisé car le graphe est fini. Mettons maintenant $k = i_r$]

$$\geqslant \bar{a}_{i_r i_r} + \bar{b}_{i_r i_r} + (a_{i_r i_r} b_{i_r i_{r+1}} + \bar{b}_{i_r i_r} b_{i_r i_{r+1}})$$
$$+ (a_{i_{r+1} i_r} b_{i_r i_{r+2}} + \bar{b}_{i_r i_{r+1}} b_{i_r i_{r+2}})$$
$$+ (a_{i_{r+2} i_r} b_{i_r i_{r+3}} + \bar{b}_{i_r i_{r+2}} b_{i_r i_{r+3}})$$
$$+ \ldots$$
$$+ (a_{i_s i_r} b_{i_r i_r} + \bar{b}_{i_r i_s} \cdot b_{i_r i_r})$$
$$\geqslant \bar{b}_{i_r i_r} + b_{i_r i_r} = 1.$$

Ce théorème donne le résultat graphique suivant :

THÉORÈME (2′) — Dans un graphe (p, q)-total nous avons l'une des deux alternatives suivantes :

1) le rayon de ce graphe ρ est $\leqslant q$,

2) $q < \rho \leqslant p + q$ et pour tout sommet s_{i_0} il existe un autre sommet s_i tel que :

$$d(s_{i_0}, s_i) > q \quad \text{et} \quad e(s_i) \leqslant p + q.$$

En effet, si l'on met dans T_2, $a_{ij}^{(p)}$ au lieu de a_{ij} et $a_{ij}^{(q)}$ au lieu de b_{ij}, on aura :

$$(7) \qquad T_2 \equiv \sum_i \sum_j (\bar{a}_{ij}^{(p)} \cdot \bar{a}_{ji}^{(q)} + \bar{a}_{ii}^{(p)} + \bar{a}_{jj}^{(q)}) + \sum_i \prod_j a_{ij}^{(q)}$$
$$+ \sum_i \bar{a}_{i_0 i}^{(q)} \prod_i \sum_k a_{ik}^{(p)} a_{kj}^{(q)} \equiv 1$$

Cela veut dire :

$$C = \prod_i \prod_j (a_{ij}^{(p)} + a_{ji}^{(q)})\, a_{ii}^{(p)} \cdot a_{jj}^{(q)} = 1 \Rightarrow$$

ou bien

$$R_1 \equiv \sum_i \prod_j a_{ij}^{(q)} = 1$$

ou $$R_2 \equiv \sum_i \bar{a}^{(q)}_{i_0 i} \prod_j \sum_k a^{(p)}_{ik} a^{(q)}_{kj} = 1.$$

Mais $C = 1$ équivaut : le graphe est (p, q)-total.

$R_1 = 1$ équivaut : le graphe a un rayon $\rho \leqslant q$ (voir théorème 3, chap. II et ses corollaires).

$R_2 = 1$ équivaut : Pour $s_{i_0} \in S$ il existe s_i tel que

1°) $a^{(q)}_{i_0 i} = 0 \Leftrightarrow d(s_{i_0}, s_i) > q$

2°) $\prod_j \sum_k a^{(p)}_{ik} \cdot a^{(q)}_{kj} = \prod_j a^{(p+q)}_{ij} = 1 \Leftrightarrow e(s_i) \leqslant p + q$

(voir les théorèmes 1 et 3, chapitre II).

Le Théorème $T_2 \equiv 1$, sous la forme (7), équivaut donc l'énoncé du théorème (2′).

Ce théorème donne le résultat graphique suivant :

Corollaire (1) — Un graphe (p, q)-total, $(p > 0)$, de rayon $\rho = p + q$, a au moins $[q/p] + 2$ centres. ($[q/p]$ étant la partie entière de q/p. A cause de la symétrie on prendra toujours $p \leqslant q$).

En effet, puisque $\rho = p + q > q$ nous savons d'après le théorème 2′, que, quel que soit $s_{i_0} \in S$, il existe s_i vérifiant (1°) et (2°). Ce sommet s_i est donc un centre car $\rho = p + q$.

Commençons par un centre c_1. Ce centre doit être précédé par un autre centre c_2 vérifiant :

(8) $$d(c_2, c_1) \leqslant p$$

(9) $$d(c_1, c_2) > q.$$

$c_2 \neq c_1$ à cause de (9). Il existe donc au moins 2 centres.

c_2 doit également être précédé par un centre c_3 tel que :

(10) $$d(c_3, c_2) \leqslant p$$

(11) $$d(c_2, c_3) > q.$$

$c_3 \neq c_2$ à cause de (11).

$c_3 = c_1 \Rightarrow q < d(c_2, c_1) \leqslant p \Rightarrow q/p < 1$ donc $[q/p] = 0$.

Donc, si $q/p \geqslant 1$, on a $c_3 \neq c_1$, et on a au moins 3 centres. Dans ce dernier cas c_3 doit, à son tour, être précédé par le centre c_4 et ainsi de suite. Nous pouvons avoir $c_{r+2} = c_1$ seulement si

$$\begin{aligned} q < d(c_{r+1}, c_{r+2}) = d(c_{r+1}, c_1) &\leqslant d(c_{r+1}, c_r) \\ &+ d(c_r, c_{r-1}) \\ &+ \ldots \\ &+ d(c_2, c_1) \leqslant r \cdot p \end{aligned}$$

donc, $c_{r+2} = c_1 \Rightarrow q/p < r$,
d'où $q/p \geqslant r \Rightarrow c_{r+2} \neq c_1$
$\Rightarrow$ il existe au moins $r+2$ centres, d'où le corollaire.

Remarquons que si $p=0$ et $\rho = q$, tous les sommets sont des centres, (voir figure 1).

Exemple : Le graphe de la figure (2) est (1, 2)-total.

Son rayon est $\rho = 3$. Il doit avoir au moins $[2/1]+2 = 4$ centres.

Ce corollaire donne pour les graphes complets, le résultat suivant :

Corollaire 2 : Un graphe complet (c'est-à-dire (1, 1)-total) de rayons $\rho = 2$, a au moins 3 centres. (Immédiat, car $[q/p] = 1$).

Après avoir trouvé, par les moyens booléens, les deux théorèmes (1′) et (2′) et leurs corollaires, j'ai pu les prouver d'une façon graphique, en traduisant en langage graphique les opérations booléennes utilisées pour la démonstration des théorèmes (1) et (2).

Remarque : Un graphe (p, q)-total est a fortiori $(p, q+r)$-total quel que soit r entier, positif ou nul.

Un graphe (p,q)-total n'est pas nécessairement $(p-r, q+r)$-total.

Exemple : Le graphe de la figure (3) est (2,5)-total, mais il n'est pas (3,4)-total à cause du couple (a, b).

Il n'est pas non plus (1,6)-total à cause du couple (a, c).

2. — Coloration des graphes

«On dit qu'un graphe est p–chromatique s'il est possible de colorier les sommets avec p couleurs de telle sorte que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur» (cf. [1]).

THÉORÈME 3 : Un graphe $G = (S, \Gamma)$ de matrice booléenne $A = (a_{ij}) \in \Omega$ est 2^q-chromatique si, et seulement si, en attribuant à chaque sommet s_i q variables booléennes $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^q$, l'équation booléenne

$$(12) \qquad \varphi(2^q) \equiv \sum_i \sum_{j \neq i} a_{ij} \left[\sum_{r=1}^{2^q} F_r(x_i) \cdot F_r(x_j) \right] = 0$$

admet une solution. $F_r(x_i)$ est une forme canonique des variables

$x_i^1, \ldots, x_i^q$ correspondant au sommet s_i et $F_r(x_j)$ la même forme canonique des variables $x_j^1, \ldots, x_j^q$ correspondant au sommet s_j.

En effet, une solution de (12) permettra une coloration telle que :

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 1 \text{ correspond à la couleur } (1) \\ F_2(x) &= 1 \quad \text{» } \quad \text{» } \quad (2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{2^q}(x) &= 1 \quad \text{» } \quad \text{» } \quad (2^q), \end{aligned}$$

l'équation (12) montre que deux sommets adjacents ($a_{ij} = 1$) ne peuvent pas avoir la même couleur.

Et inversement, une coloration avec 2^q couleurs permet de trouver les variables x qui vérifient (12) en mettant $F_1(x_i) = 1$ si s_i est colorié avec la couleur (1), $F_2(x_j) = 1$ si s_j est colorié avec la couleur (2) et ainsi de suite.

Les solutions de (12), s'il y en a, donnent toutes les façons de colorier G avec 2^q couleurs.

Des équations semblables à (12) permettent de vérifier si un graphe est p-chromatique, et de trouver les façons de le colorier avec p couleurs. En effet, si $2^{q-1} < p \leqslant 2^q$ on prendra au lieu de (12), l'équation :

$$(13) \qquad \varphi(p) \equiv \sum_i \sum_{j \neq i} a_{ij} \left[\sum_{r=1}^{p-1} F_r(x_i^1, \ldots, x_i^q) \cdot F_r(x_j^1, \ldots, x_j^q) + \left(\sum_{r=p}^{2^q} F_r(x_i) \right) \cdot \left(\sum_{r=p}^{2^q} F_r(x_j) \right) \right] = 0$$

Dans ce cas, les formes $F_1, F_2, \ldots, F_{p-1}$ correspondent aux couleurs $1, 2, \ldots, (p-1)$, et toutes les autres formes à la couleur p.

Quand nous voulons résoudre (12) ou (13), nous les mettons de préférence sous la forme : $\bar{\varphi} = 1$.

Exemples :

1) Un graphe est 4-chromatique si, et seulement si, l'équation booléenne

$$\varphi(4) \equiv \sum_i \sum_{j \neq i} a_{ij} (x_i^1 x_i^2 x_j^1 x_j^2 + x_i^1 \bar{x}_i^2 x_j^1 \bar{x}_j^2 + \bar{x}_i^1 x_i^2 \bar{x}_j^1 x_j^2 + \bar{x}_i^1 \bar{x}_i^2 \bar{x}_j^1 \bar{x}_j^2) = 0$$

a une solution (cf. [4]). On peut prendre au lieu de $\varphi(4) = 0$ l'équation

$$\bar{\varphi}(4) \equiv \prod_i \prod_{j \neq i} (\bar{a}_{ij} + x_i^1 \bar{x}_j^1 + \bar{x}_i^1 x_j^1 + x_i^2 \bar{x}_j^2 + \bar{x}_i^2 x_j^2) = 1$$

2) Un graphe est 5-chromatique si, et seulement si, l'équation booléenne

$$\varphi(5) \equiv \sum_i \sum_{j \neq i} a_{ij} (x_i^1 \bar{x}_i^2 x_i^3 x_j^1 \bar{x}_j^2 x_j^3 + x_i^1 x_i^2 \bar{x}_i^3 x_j^1 x_j^2 \bar{x}_j^3 + \\ + x_i^1 \bar{x}_i^2 x_i^3 x_j^1 x_j^2 x_j^3 + x_i^1 \bar{x}_i^2 \bar{x}_i^3 x_j^1 \bar{x}_j^2 \bar{x}_j^3 + \bar{x}_i^1 \bar{x}_j^1) = 0$$

a une solution.

Application — Problèmes des quatre couleurs.

Supposons que l'on puisse mettre la condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit planaire, sous une forme booléenne, soit $C(a_{ij}) = 1$.

Le problème des quatre couleurs équivaut au problème suivant :

Si $C(a_{ij}) = 1$, l'équation booléenne $\varphi(4) = 0$ admet une solution; ce qui veut dire d'après ce qui précède : si le graphe est planaire, on peut le colorier avec quatre couleurs. En d'autres termes, on doit prouver que l'équation booléenne :

(14) $\qquad C(a_{ij}) \cdot \varphi(4) = 0$ admet une solution.

En effet, ceci revient à dire que si $C(a_{ij}) = 1$, (le graphe est planaire), on peut trouver une solution de $\varphi(4) = 0$, donc une coloration avec quatre couleurs; l'équation (14) étant évidemment vérifiée si $C = 0$ (le graphe n'est pas planaire).

Cela revient à prouver également que :

(15) $\qquad C(a_{ij}) \cdot \varphi(4) = 1$ n'est pas une tautologie.

3. — Conclusion

Nous avons donné dans ce chapitre une généralisation du théorème initial. Cette généralisation complète un résultat connu, suivant lequel un graphe total admet un centre. En effet, au paragraphe 1 nous avons donné une limite supérieure au rayon de tels

graphes, ainsi qu'une limite inférieure au nombre de centres dans des cas particuliers.

Dans le paragraphe 2, nous avons présenté une méthode pour étudier la coloration d'un graphe, différente de celle qui a été présentée au premier chapitre. La première méthode est beaucoup plus facile pour trouver le nombre chromatique et pour trouver les différentes façons de colorier le graphe. La deuxième méthode, par contre, permet mieux une étude théorique du problème de coloration d'un graphe.

DEUXIÈME PARTIE

PROGRAMMES LINÉAIRES ET QUADRATIQUES

1. — Programmes linéaires

Un programme linéaire est un problème comme le suivant :

$$(1)\quad \begin{cases} \text{Maximiser} & F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{avec} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant d_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \\ & x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

Nous savons que si ce problème a une solution finie, le problème dual suivant a une solution finie :

$$(2)\quad \begin{cases} \text{Minimiser} & f(Y) = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i \\ \text{avec} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \geqslant c_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \\ & y_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

Nous pouvons voir facilement que quels que soient les vecteurs $X = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$ et $Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix}$ vérifiant les contraintes de (1) et (2) on a :

$$F(X) \leqslant f(Y).$$

Nous savons aussi que X et Y sont les solutions de (1) et (2) si, et seulement si, on a :

1°) X et Y vérifient les contraintes de (1) et (2)

2°) $F(X) = f(Y)$.

La condition (2°) équivaut :

$$\left[d_i - \sum_j a_{ij} x_j\right] \cdot y_i = 0 \text{ quel que soit } i$$

$$\left[\sum_i a_{ij} y_i - c_j\right] \cdot x_j = 0 \text{ quel que soit } j.$$

La résolution du programme linéaire et de son dual revient donc à trouver les $2n + 2m$ inconnues x_j, y_i, u_j, v_i qui vérifient les $n + m$ équations :

$$(3) \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + v_i = d_i \\ -u_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \end{cases}$$

avec les conditions :

$$x_j, v_i, u_j, y_i \geqslant 0$$
$$x_j \,.\, u_j = v_i \,.\, y_i = 0 \text{ quels que soient } i \text{ et } j.$$

Nous pouvons poser :

$$(4) \qquad \begin{cases} x_j = \alpha_j X_j, & y_i = \bar{\beta}_i Y_i \\ u_j = \bar{\alpha}_j X_j, & v_i = \beta_i Y_i \end{cases}$$

où α_i, β_i sont des variables booléennes et $\bar{\alpha}_j$, $\bar{\beta}_i$ leurs négations. La résolution du programme linéaire revient à trouver les $(n+m)$ variables booléennes α_j, β_i et les $(n+m)$ variables algébriques non négatives X_j, Y_i qui satisfont les $(n+m)$ équations :

$$(3') \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j X_j + \beta_i Y_i = d_i \\ -\bar{\alpha}_j X_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \bar{\beta}_i Y_i = c_j. \end{cases}$$

A partir de ce système, nous pouvons facilement calculer X_j et Y_i par rapport aux $(n+m)$ variables booléennes qui seront ensuite déterminées par la condition $X_j \geqslant 0$, $Y_i \geqslant 0$. Nous dirons qu'on a une dégénérescence si le système (3') peut être vérifié avec une des inconnues algébriques nulle. En effet, dans ce cas, on peut résoudre le système de $(n+m)$ équations avec $(n+m-1)$

variables. Nous pouvons écarter le cas de dégénérescence, étant donné qu'on peut l'éviter en faisant une «perturbation virtuelle» du second membre de (3′) (voir [8], [13], [15]).
Nous appellerons «solution booléenne» l'une des formes canoniques des variables booléennes qui, égalant 1, donne une solution algébrique non négative. Une telle solution booléenne nous informe sur le «choix» qu'il faut faire pour avoir une solution optimale sans tenir compte des valeurs numériques. Nous noterons la forme booléenne :

$$\alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_r} \bar{\alpha}_{j_{r+1}} \dots \bar{\alpha}_{j_n} \beta_{i_1} \dots \beta_{i_s} \bar{\beta}_{i_{s+1}} \dots \bar{\beta}_{i_m}$$

par les deux sous-ensembles d'indices (J, I) où :

$$J = \{j_1, \dots, j_r\}, \quad I = \{i_1, \dots, i_s\}$$

en notant par $\bar{J}, \bar{I}$ leurs sous-ensembles complémentaires respectifs.

Le déterminant principal du système (3′) est :

$$(5) \qquad M = \begin{vmatrix} a_{11}\ \alpha_1 \dots a_{1n}\ \alpha_n & \beta_1 & & \\ \vdots \quad\quad \vdots & & \ddots & \\ a_{m1}\alpha_1 \dots a_{mn}\alpha_n & & & \beta_m \\ -\bar{\alpha}_1 & a_{11}\bar{\beta}_1 \dots & & a_{m1}\bar{\beta}_m \\ \ddots & \vdots & & \vdots \\ & \vdots & & \vdots \\ & -\bar{\alpha}_n & a_{1n}\bar{\beta}_1 \dots & a_{mn}\bar{\beta}_m \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est identiquement nul si $|I| + |J| \geqslant m + 1$ car on pourrait en extraire une matrice nulle, de dimensions $n \,.\, (m+1) = n \,.\, [(m+n) - n + 1]$. Il est identiquement nul également si $|I| + |J| \leqslant m - 1$ car on pourrait en extraire une matrice nulle de dimensions $m \,.\, (n+1) = m \,.\, [(m+n) - m + 1)]$. Il faut donc éliminer, a priori, de telles formes canoniques et ne considérer que les $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ formes canoniques pour lesquelles $|J| + |I| = m$, que nous appellerons «formes admissibles». On arrive ainsi au résultat connu suivant : Dans un programme linéaire de n inconnues et m contraintes, on a au plus m inconnues non nulles.

Une forme admissible $S = (J, I)$ donne sans ambiguité les variables algébriques X_j et Y_i des équations :

$$(6)\qquad \begin{cases} \sum_{j\in J} a_{ij}X_j + Y_i = d_i & (i \in I) \\ \sum_{j\in \bar{J}} a_{ij}X_j = d_i & (i \in \bar{I}) \\ -X_j + \sum_{i\in\bar{I}} a_{ij}Y_i = c_j & (j \in \bar{J}) \\ \sum_{i\in\bar{I}} a_{ij}Y_i = c_j & (j \in J). \end{cases}$$

Nous pouvons, d'après le système booléen (3'), démontrer les relations suivantes :

(a) $F(S) = \sum_j a_j\alpha_j X_j = \sum_i d_i\beta_i Y_i$

(b) $F(S_2) = F(S_1) = \sum_j (\alpha_j X_j)_1 \cdot (\bar{\alpha}_j X_j)_2 + \sum_i (\beta_i Y_i)_1 \cdot (\bar{\beta}_i Y_i)_2$

(c) $\sum_i (\alpha_j X_j)_1 \cdot (\bar{\alpha}_j X_j)_2 + \sum_i (\beta_i Y_i)_1 \cdot (\beta_i Y_i)_2 + \sum_j (\alpha_j X_j)_2 \cdot (\bar{\alpha}_j X_j)_1 + \sum_i (\beta_i Y_i)_2 \cdot (\beta_i Y_1)_1 = 0$

(Les indices en dehors des parenthèses correspondent aux formes admissibles).

Nous avons (a) car :

$$\begin{aligned} F(S) &= \sum_j c_j\alpha_j X_j = \sum_j \alpha_j X_j \left(-\bar{\alpha}_j X_j + \sum_i a_{ij}\beta_i Y_i\right) \\ &= \sum_i \beta_i Y_i \cdot \sum_j a_{ij}\alpha_j X_j = \sum_i \beta_i Y_i \cdot (d_i - \beta_i Y_i) \\ &= \sum_i d_i\beta_i Y_i. \end{aligned}$$

Nous avons (b) et (c) car :

$$\begin{aligned} F(S_2) - F(S_1) &= \sum_j c_j(\alpha_j X_j)_2 - \sum_i d_i(\beta_i y_i)_1 \\ &= \sum_j (\alpha_j X_j)_2 \cdot \left[-(\bar{\alpha}_j X_j)_1 + \sum_i a_{ij}(\beta_i Y_i)_1\right] \end{aligned}$$

$$- \sum_i (\beta_i Y_i)_1 \cdot \left[\sum_j a_{ij} (\alpha_j X_j)_2 + (\alpha_i Y_i)_2 \right]$$

$$= - \sum_j (\alpha_j X_j)_2 \cdot (\bar{\alpha}_j X_j)_1 - \sum_i (\beta_i Y_i)_2 \cdot (\beta_i Y_i)_1$$

et de la même façon

$$= \sum_j (\alpha_j X_j)_1 \cdot (\bar{\alpha}_j X_j)_2 + \sum_i (\beta_i Y_i)_1 \cdot (\bar{\beta}_i Y_i)_2$$

d'où (b) et (c).

La relation (a) n'est autre que la relation (2°). La relation (b) permet de comparer les valeurs de la fonction économique pour deux formes admissibles différentes. La relation (c) démontre l'unicité de la solution du programme linéaire, car elle ne peut pas être vérifiée par deux formes admissibles différentes donnant des valeurs algébriques positives aux variables X_j, Y_i (sauf dans les cas de dégénérescence).

Le développement du déterminant principal M par rapport aux formes admissibles donne :

$$M = \varepsilon \cdot \sum_{(J,\bar{I})} |a_{\bar{I}J}|^2 \cdot (J, I) \tag{7}$$

$|a_{\bar{I}J}|$ étant le déterminant $|a_{ij}|$, où i parcourt le sous-ensemble $\bar{I}$ et j le sous-ensemble J ; $\varepsilon = (-1)^{n(m+1)}$. Le déterminant M a le même signe que ε, quelle que soit la forme admissible.

On peut résoudre le programme linéaire en développant MX_j et MY_i par rapport aux formes admissibles et en éliminant, au cours des développements, les formes ayant un coefficient algébrique de signe $-\varepsilon$.

Nous avons notamment :

$$MX_j = \varepsilon \cdot \sum_{(J,\bar{I});j\in J} |a_{\bar{I}J}| \cdot |a_{\bar{I}J} - a_{\bar{I}J} + d_{\bar{I}}| \cdot (J, I)$$

$$- \varepsilon \sum_{(J,\bar{I});j\in\bar{J}} |a_{\bar{I}J}| \cdot \begin{vmatrix} c_j & c_J \\ a_{\bar{I}j} & a_{\bar{I}J} \end{vmatrix} \cdot (J, I)$$

$$MY_i = \varepsilon \sum_{(J,\bar{I});i\in I} |a_{\bar{I}J}| \cdot \begin{vmatrix} d_i & a_{iJ} \\ d_{\bar{I}} & a_{\bar{I}J} \end{vmatrix} \cdot (J,I)$$

$$+ \varepsilon \sum_{(J,\bar{I};)i\in\bar{I}} |a_{\bar{I}J}| \cdot |a_{\bar{I}J} - a_{iJ} + c_J| \cdot (J,I) \ .$$

Un terme comme $a_{\bar{I}J} - a_{\bar{I}j} + d_{\bar{I}}$ doit être interprété comme ceci : on enlève de la matrice $a_{\bar{I}J}$ la colonne $a_{\bar{I}j}$ et on remplace cette dernière par le vecteur $d_{\bar{I}}$.

Nous appellerons deux formes canoniques admissibles $S_1 = (J_1, I_1)$, $S_2 = (J_2, I_2)$, voisines si $|J_1 \cap J_2| + |I_1 \cap I_2| = m - 1$. Deux formes voisines diffèrent l'une de l'autre en ce que l'une contient un couple comme $\alpha_h \bar{\alpha}_k$ et l'autre $\bar{\alpha}_h \alpha_k$, le reste étant le même. On peut considérer les formes admissibles comme les sommets d'un graphe de voisinage, avec l'application Γ telle que $S_1 \in \Gamma S_2$ si, et seulement si, S_1 et S_2 sont voisines. C'est donc un graphe symétrique et homogène d'ordre $m \cdot n$. Ce graphe correspond biunivoquement aux sommets déterminés dans l'espace à n dimensions, par les $m+n$ plans :

$$\sum_j a_{ij} x_j = d_i, \quad x_j = 0$$

ainsi qu'aux sommets déterminés dans l'espace à m dimensions, par les $m+n$ plans :

$$\sum_i a_{ij} y_i = c_j, \quad y_i = 0 \ ;$$

les arêtes du graphe correspondent aux droites reliant les sommets dans ces espaces.

2. — Programmes linéaires paramétriques

Supposons que les quantités c_j ne sont pas des constantes, mais qu'elles dépendent (linéairement ou non linéairement) des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$. Dans ce cas la solution du programme dépendra des valeurs de ces paramètres. Nous pouvons trouver parmi les formes admissibles, celles qui peuvent être une solution de ce programme. Nous appellerons ces formes « Solutions possibles » du programme paramétrique. En effet, on voit de (8) que seules les valeurs de X_j; $j \in \bar{J}$ et Y_i, $i \in \bar{I}$ dépendent de c_j. Donc, une forme admissible $S = (J, I)$ est une solution possible du programme paramétrique, seulement si elle donne $X_j \geqslant 0$ pour $j \in J$ et $Y_i \geqslant 0$ pour $i \in I$. Nous pouvons trouver toutes les solutions possibles en éliminant tout d'abord les formes dont l'incompatibilité ne dépend pas des c_j. Pour ce faire, on considère pour une

forme (J, I) les projections des MX_j et MY_i avec $j \in J$ et $i \in I$ seulement. On élimine ainsi les formes qui donnent à l'une de ces quantités le signe $-\varepsilon$. Les formes qui restent sont les solutions possibles du programme paramétrique. En considérant ensuite les projections des autres variables (MX_j; $j \in \bar{J}$ et MY_i; $i \in \bar{I}$) sur les solutions possibles, on trouve les domaines dans l'espace des λ, qui admettent comme solution une solution possible quelconque. En effet, si S = (J, I) est une solution possible, alors $X_j \geqslant 0$ et $Y_i \geqslant 0$ quand $j \in J$ et $i \in I$. Les inégalités $Y_i \geqslant 0$, ($i \in \bar{I}$) et $X_j \geqslant 0$, ($j \in \bar{J}$), qui dépendent des paramètres, nous donnent le domaine de validité de la solution S.

Les solutions possibles forment dans le graphe de voisinage G, un sous-graphe G'. Le nombre des solutions possibles d'un programme paramétrique est limité d'après le lemme et le théorème suivants :

LEMME : Le degré d'un sommet du sous-graphe représentant les «solutions possibles» est $\leqslant n$.

En effet, soit $S_1 = (J_1, I_1)$ une solution possible avec :

$$J_1 = \{j_1, j_2, \ldots, j_k, \ldots, j_1, \ldots, j_s\}, \qquad \bar{J}_1 = \{i_{s+1}, \ldots, j_r, \ldots, j_n\},$$
$$I_1 = \{i_{s+1}, \ldots, i_m\}, \qquad \bar{I}_1 = \{i_1, \ldots, i_s\}$$

Cette forme contient $\bar{\alpha}_j$. Elle ne peut pas avoir pour «voisines» deux solutions possibles contenant α_{j_r} car, si une première voisine S_2 contient $\alpha_{j_r} \bar{\alpha}_{j_k}$, et une autre S_2 contient $\alpha_{j_r} \bar{\alpha}_{j_1}$, nous aurons d'après la relation (c), parag. 1 :

$$(\alpha_{j_r} X_{j_r})_2 \cdot (\bar{\alpha}_{j_r} X_{j_r})_1 + (\bar{\alpha}_{j_k} X_{j_k})_2 \cdot (\alpha_{j_k} X_{j_k})_1 = 0$$
$$(\alpha_{j_l} X_{j_l})_1 \cdot (\bar{\alpha}_{j_l} X_{j_l})_3 + (\bar{\alpha}_{j_r} X_{j_r})_1 \cdot (\alpha_{j_r} X_{j_r})_3 = 0$$
$$(\alpha_{j_k} X_{j_k})_3 \cdot (\bar{\alpha}_{j_k} X_{j_k})_2 + (\bar{\alpha}_{j_l} X_{j_l})_3 \cdot (\alpha_{j_l} X_{j_l})_2 = 0$$

d'où :

$$(\alpha_{j_l} X_{j_l})_1 (\alpha_{j_r} X_{j_r})_2 (\alpha_{j_k} X_{j_k})_3 + (\alpha_{j_k} X_{j_k})_1 (\alpha_{j_l} X_{j_l})_2 (\alpha_{j_r} X_{j_r})_3 = 0.$$

Ces quantités ne dépendant pas des c_j, l'une d'elles doit être négative et la forme correspondante ne peut pas être une solution possible du programme paramétrique. Ce sommet S_1 peut avoir dans G' au maximum un seul sommet voisin pour chaque indice dans $\bar{J}_1$ et $\bar{I}_1$; donc, en tout, n voisins.

THÉORÈME : Le nombre maximum des solutions possibles d'un programme linéaire paramétrique de n inconnues et m contraintes est :

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!} \cdot \frac{m}{2m-1} .$$

En effet, si G′ est le sous-graphe représentant les solutions possibles, G″ le sous-graphe complémentaire par rapport au graphe de voisinage G, et si r_1, r_2 sont les nombres d'arêtes dans G′, G″ et r_{12} le nombre de celles qui relient G′ et G″, nous aurons :

$r_1 \leqslant \dfrac{n \,.\, |G'|}{2}$ à cause du lemme, $|G'|$ étant le nombre des sommets de G′;

$2r_1 + r_{12} = |G'| \,.\, n \,.\, m$ car le graphe G est homogène d'ordre $n \,.\, m$;

$r_{12} + 2r_2 = |G''| \,.\, n \,.\, m$ pour la même raison.

Nous avons donc :

$$2r_1 + r_{12} = |G'| \,.\, n \,.\, m \leqslant n \,.\, |G'| + |G''| \,.\, n \,.\, m,$$
$$|G'| \,.\, (2m-1) \leqslant m \,.\, (|G'| + |G''|)$$

d'où

$$|G'| \leqslant \frac{(n+m)!}{n!\,m!} \cdot \frac{m}{2m-1} .$$

3. — Programmes quadratiques

Soit le programme quadratique :

$$\begin{cases} \text{Max} : F(X) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_j x_k \\ \text{avec} \qquad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant d_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \\ \qquad\qquad x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) . \end{cases}$$

Nous supposons que la matrice $B = (b_{jk})$ est symétrique et définie-positive. Avec les notations des paragraphes précédents, et en considérant les conditions de Kuhn et Tucker [4], qui sont ici nécessaires et suffisantes pour la résolution de (9), on voit que la

solution de (9) est la solution non-négative du système

$$(10)\qquad \begin{cases} \sum_j a_{ij}\alpha_j X_j + \beta_i Y_i = d_i \\ \sum_k b_{jk}\alpha_k X_k - \bar{\alpha}_j X_j + \sum_i a_{ij}\beta_i Y_i = c_j \cdot \end{cases}$$

Donc, il suffit de nouveau de résoudre ce système linéaire de $(m+n)$ équations avec $(m+n)$ inconnues algébriques et $(m+n)$ inconnues booléennes.

Le déterminant principal de (10) est identiquement nul pour les formes canoniques $S = (J, I)$ telles que $|J| + |I| < m$. Les formes admissibles ici, sont donc celles pour lesquelles $|J| + |I| = m + r$ avec r entier non-négatif. Le nombre de ces formes est

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{(m+n)!}{(m+r)!\,(n-r)!} \cdot$$

Une forme admissible définit, en général, les valeurs algébriques des X_j et Y_i, par les $(n+m)$ équations :

$$(11)\qquad \begin{cases} \sum_{j\in J} a_{ij} X_j + Y_i = d_i & (i \in I) \\ \sum_{j\in J} a_{ij} X_j = d_i & (i \in \bar{I}) \\ \sum_{j\in J} b_{kj} X_j - X_k + \sum_{i\in\bar{I}} a_{ik} Y_i = c_k & (k \in \bar{J}) \\ \sum_{j\in J} b_{kj} X_j + \sum_{i\in\bar{I}} a_{ik} Y_i = c_k & (k \in J) \end{cases}$$

Le système d'équations (10) nous permet de démontrer facilement les relations :

$$(a')\qquad 2F(S) = \sum_j c_j\alpha_j X_j + \sum_i d_i\beta_i Y_i$$

$$(b')\qquad 2[F(S_2) - F(S_1)] = \sum_j [(\alpha_j X_j)_1 \cdot (\bar{\alpha}_j X_j)_2 - (\bar{\alpha}_j X_j)_1 \cdot (\alpha_j X_j)_2] + \sum_i [(\beta_i Y_i)_1 \cdot (\bar{\beta}_i Y_i)_2 - (\bar{\beta}_i Y_i)_1 \cdot (\beta_i Y_i)_2]$$

$$(c')\qquad \sum_j [(\alpha_j X_j)_1 \cdot (\bar{\alpha}_j X_j)_2 + (\bar{\alpha}_j X_j)_1 \cdot (\alpha_j X_j)_2]$$

$$+\sum_i [(\beta_i Y_i)_1 \cdot (\beta_i Y_i)_2 + (\beta_i Y_i)_1 \cdot (\beta_i Y_i)_2]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_j \sum_k b_{jk}[(\alpha_j X_j)_1 - (\alpha_j X_j)_2] \cdot [(\alpha_k X_k)_1 - (\alpha_k X_k)_2] = 0.$$

Les indices 1, 2 indiquent deux formes admissibles différentes. Nous avons (a') car :

$$\begin{aligned} 2F(S) &= 2\sum_j c_j \alpha_j X_j - \sum_j \alpha_j X_j \sum_k b_{jk} \alpha_k X_k \\ &= 2\sum_j c_j \alpha_j X_j - \sum_j \alpha_j X_j \left(c_j + \bar{\alpha}_j X_j - \sum_i a_{ij} \beta_i Y_i \right) \\ &= \sum_j c_j \alpha_j X_j + \sum_i \beta_i Y_i \sum_j a_{ij} \alpha_j X_j \\ &= \sum_j c_j \alpha_j X_j + \sum_i \beta_i Y_i (d_i - \beta_i Y_i) \\ &= \sum_j c_j \alpha_j X_j + \sum_i d_i \beta_i Y_i \end{aligned}$$

Nous avons (b') car :

$$\begin{aligned} 2[F(S_2) - F(S_1)] &= \sum_j c_j (\alpha_j X_j)_2 + \sum_i d_i (\beta_i Y_i)_2 \\ &\quad - \sum_j c_j (\alpha_j X_j)_1 - \sum_i d_i (\beta_i Y_i)_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_j (\alpha_j X_j)_2 \cdot \left[\sum_k b_{jk} (\alpha_k X_k)_1 - (\bar{\alpha}_j X_j)_1 + \sum_i a_{ij} (\beta_i Y_i)_1 \right] \\ &\quad + \sum_i (\beta_i Y_i)_2 \cdot \left[\sum_j a_{ij} (\alpha_j X_j)_1 + (\beta_i Y_i)_1 \right] \\ &\quad - \sum_j (\alpha_j X_j)_1 \cdot \left[\sum_k b_{jk} (\alpha_k X_k)_2 - (\bar{\alpha}_j X_j)_2 + \sum_i a_{ij} (\beta_i Y_i)_2 \right] \\ &\quad - \sum_i (\beta_i Y_i)_1 \cdot \left[\sum_j a_{ij} (\alpha_j X_j)_2 + (\beta_i Y_i)_2 \right] \\ &= \sum_j [(\alpha_j X_j)_1 \cdot (\bar{\alpha}_j X_j)_2 - (\bar{\alpha}_j X_j)_1 \cdot (\alpha_j X_j)_2] \\ &\quad + \sum_i [(\beta_i Y_i)_1 \cdot (\beta_i Y_i)_2 - (\beta_i Y_i)_1 \cdot (\beta_i Y_i)_2] \cdot \end{aligned}$$

Nous avons la relation (c′) car, d'après (a′) nous avons :

$$-\sum_j c_j\alpha_j X_j + \sum_i d_i\beta_i Y_i + \sum_j \sum_k b_{jk}(\alpha_j X_j)(\alpha_k X_k) = 0$$

d'où

$$0 = -\sum_j c_j(\alpha_j X_j)_1 + \sum_i d_i(\beta_i Y_i)_1 + \sum_j \sum_k b_{jk}(\alpha_j X_j)_1 \cdot (\alpha_k X_k)_1$$

$$= -\sum_j (\alpha_j X_j)_1 \cdot \left[\sum_k b_{jk}(\alpha_k X_k)_2 - (\alpha_j X_j)_2 + \sum_i a_{ij}(\beta_i Y_i)_2\right]$$

$$+ \sum_i (\beta_i Y_i)_1 \cdot \left[\sum_j a_{ij}(\alpha_j X_j)_2 + (\beta_i Y_j)_2\right]$$

$$+ \sum_j \sum_k b_{jk}(\alpha_j X_j)_1 \cdot (\alpha_k X_k)_1$$

et de la même façon on trouve une équation similaire en interchangeant les indices 1 et 2.

En ajoutant les deux dernières équations on trouve la relation (c′).

La relation (a′) nous permet de calculer facilement la fonction économique F(S); la relation (b′) nous permet de comparer deux formes admissibles et de suivre, au cours du calcul, l'évolution de la fonction économique; et la relation (c′) démontre l'unicité de la solution car elle ne peut pas être satisfaite avec deux solutions non-négatives *distinctes*, la matrice $B = (b_{ij})$ étant définie positive.

Dans les publications [10] nous avons proposé des méthodes de résolution des programmes linéaires, paramétriques et quadratiques, qui découlent de la mise en forme booléenne de ces programmes. Nous proposerons dans le paragraphe suivant une nouvelle méthode qui diffère de toute autre dans la façon de nous acheminer vers la solution optimale.

4. — Nouvelle méthode de résolution des programmes quadratiques

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que la résolution d'un programme quadratique revient à la résolution du problème algébrique suivant :

Trouver les vecteurs

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{vmatrix} \qquad Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+m} \end{vmatrix}$$

qui résolvent le système :

$$(12) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = d_i & (i = 1, \ldots m) \\ \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_k - y_i + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_{n+i} = c_j & (j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

avec :

$$(13) \qquad X' \cdot Y = 0$$

$$(14) \qquad X \geqslant 0,\ Y \geqslant 0,$$

la matrice $B = (b_{jk})$ étant symétrique et définie positive.

Nous pouvons aussi, pour simplifier, mettre le système (12) sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$(15) \quad \begin{cases} A \,.\, X_0 + X_{00} = D \\ B \,.\, X_0 - Y_0 + A' \,.\, Y_{00} = C \end{cases}$$

$$(16) \qquad \mathscr{A} \,.\, X + \mathscr{B} \,.\, Y = \mathscr{C}$$

avec les notations :

$$X_0 = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}, \quad X_{00} = \begin{vmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{vmatrix}.$$

$A = (a_{ij})$, $(i = 1, \ldots, m)$, $(j = 1, \ldots, n)$; A' matrice transposée de A.

$B = (b_{jk})$, $(j, k = 1, \ldots, n)$.

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{B} = \begin{pmatrix} -\Delta & A' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{C} = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix},$$

(Δ étant une matrice dont tous les éléments sont nuls sauf sur la diagonale principale où ils sont égaux à 1).

La méthode consiste à résoudre le système (12) en commençant

par une base admissible (que l'on définira par la suite), vérifiant (12) et (13), et en augmentant, par itérations successives, *le nombre* des composantes non-négatives des vecteurs X et Y, jusqu'au moment où (14) sera vérifiée. Nous verrons qu'au cours d'une itération principale, la relation (13) peut ne pas être vérifiée, mais elle le sera à la fin de l'itération. Nous remarquons donc que nous nous dirigeons vers la solution optimale sans nous soucier de l'amélioration de la fonction économique

$$F = C' . X_0 - \frac{1}{2} X'_0 . B . X_0$$

mais uniquement par des considérations algébriques qui consistent à augmenter le nombre des composantes non-négatives.

L'idée des «perturbations virtuelles» de E.M.L. Beale, citée dans [17], permet de changer une matrice semi-définie positive en une définie-positive. Nous pouvons donc considérer les programmes linéaires comme un cas particulier des programmes quadratiques dans lesquels $B = 0$. Il suffit en effet pour avoir une matrice définie positive de prendre $B = \varepsilon . \Delta$, ε étant un nombre positif très petit.

Soit Ω l'ensemble des indices $\{1, 2, ..., (n+m)\}$ et soit V un sous-ensemble de Ω. Nous noterons par X_V et Y_V les restrictions des vecteurs X et Y sur les composantes x_i et y_i telles que $i \in V$. De la même façon, nous noterons par $\mathscr{A}_V$ la restriction de la matrice $\mathscr{A}$ sur les colonnes dont l'indice i appartient à V. Ainsi un système comme :

$$\mathscr{A}_V . X_V + \mathscr{B}_W . Y_W = \mathscr{C} \tag{17}$$

aura un sens bien défini, V et W étant deux sous-ensemble de Ω.

À partir d'un vecteur restreint, soit X_V, dont les composantes sont connues, nous pouvons avoir le vecteur X correspondant, en mettant $x_i = (X_V)_i$ si $i \in V$ et $x_i = 0$ si $i \notin V$. La même chose pour Y. Ainsi, si X_V et Y_W vérifient le système (17), alors les vecteurs X et Y correspondants vérifient :

$$\mathscr{A} . X + \mathscr{B} . Y = \mathscr{C};$$

ils vérifient donc (12).

Nous appellerons «base» du système (12), un choix de $(n+m)$ composantes de X et Y, soit X_V, Y_W, tel que le système (17), qui devient un système de $(n+m)$ équations et $(n+m)$ inconnues,

admet une solution unique. En d'autres termes (V, W) est une base si, et seulement si, le déterminant $|\mathscr{A}_V, \mathscr{B}_W|$ n'est pas nul. Une base (V, W) définit donc, à partir de (17) deux vecteurs, bien déterminés X et Y vérifiant le système (12).

Nous dirons que l'on a une «dégénérescence» quand la solution de (17), pour une base choisie, donne l'une des composantes de X_V ou Y_W nulle, (cf. [1]). Nous pouvons toujours écarter le cas de dégénérescence en ajoutant un nombre infiniment petit ε à l'une des composantes du second membre du système (12), (voir [2] et [13]). Nous pouvons donc supposer qu'il n'y a pas de dégénérescence bien que cette supposition n'ait qu'une importance très minime dans la résolution. En effet, nous aurons besoin de cette supposition uniquement pour la démonstration du théorème 5 concernant la convergence de la méthode.

Dans une base (V, W) on doit avoir obligatoirement $|V| \geqslant m$ car les premières m équations du système (12) ne contenant que des x, si $|V| < m$ le déterminant $|\mathscr{A}_V, \mathscr{B}_W|$ serait nul.

Nous appellerons «base admissible» une base (V, W) telle que $V \cap W = \varnothing$. Une base admissible définit deux vecteurs X et Y vérifiant (12) et (13).

La solution de notre problème est une base admissible vérifiant (14).

Etant donné que la méthode que nous proposons consiste en des changements consécutifs des bases, nous allons la présenter de la façon suivante :

1°) Mécanisme de changement des bases;

2°) Description de la méthode;

3°) Les théorèmes qui justifient la méthode.

1°) *Mécanisme de changement de base* :

Ce mécanisme est presque le même que dans la méthode du simplexe, appliqué au système (16), soit :

$$\mathscr{A} \,.\, X + \mathscr{B} \,.\, Y = \mathscr{C}.$$

C'est-à-dire que si nous avons une base (V, W) qui donne X_V et Y_W comme solution du système (17), et que nous voulons faire entrer l'indice p dans V (respectivement l'indice q dans W), nous résoudrons le système :

$$\text{(18)} \qquad \mathscr{A}_V \,.\, R_V + \mathscr{B}_W \,.\, T_W = \mathscr{A}_p \qquad (\text{resp. } \mathscr{B}_q).$$

Les deux systèmes (17) et (18) donnent, pour θ un nombre quelconque :

$$\mathscr{A}_p \,.\, \theta + \mathscr{A}_V \,.\, (X_V - \theta \,.\, R_V) + \mathscr{B}_W \,.\, (Y_W - \theta \,.\, T_W) = \mathscr{C}$$

$$\text{resp. } \mathscr{B}_q \,.\, \theta + \mathscr{A}_V \,.\, (X_V - \theta \,.\, R_V) + \mathscr{B}_W \,.\, (Y_W - \theta \,.\, T_W) = \mathscr{C}.$$

Les vecteurs

$$(19) \qquad \begin{cases} X_{V+\{p\}} = \begin{cases} X_V = X_V - \theta \,.\, R_V \\ x_p = \theta \end{cases}, \quad Y_W = Y_W - \theta \,.\, T_W \\ X_V = X_V - \theta \,.\, R_V, \quad Y_{W+\{q\}} = \begin{cases} Y_W = Y_W - \theta \,.\, T_W \\ y_q = \theta \end{cases} \end{cases}$$

vérifient le système (16) quel que soit θ. Mais pour retrouver une nouvelle base ($|V| + |W| = n + m$), il faut choisir θ de telle façon que l'un des indices puisse quitter la base pour céder sa place à p (resp. q) qui y entre. Nous devons choisir θ de telle façon que l'une des composantes de X ou de Y données par (19), s'annule. Nous pouvons enlever de la base n'importe quelle composante x_j; $j \in V$ (ou y_i, $i \in W$) à condition que r_j (ou t_i) soit différente de zéro. En effet il suffit pour cela de prendre

$$\theta = \frac{x_j}{r_j} \left(\text{ou } \theta = \frac{y_i}{t_i} \right) \text{ et nous retrouvons une nouvelle base.}$$

Le choix de θ selon la méthode ne sera pas libre, mais nous le choisirons de telle façon que :

a) toute composante non-négative le reste;

b) une composante négative, bien définie, x_h (ou y_h) pour laquelle r_h (ou t_h) $\leqslant 0$ puisse quitter la base. (Nous verrons que dans chaque itération nous cherchons à faire sortir une telle composante négative).

Pour ce double but nous prendrons :

$$(20) \qquad \theta = \min \left\{ \frac{x_h}{r_h} \left(\text{ou } \frac{y_h}{t_h} \right), \ \frac{x_v}{r_v}, \ \frac{y_w}{t_w} / x_v, y_w \geqslant 0, r_v, t_w > 0 \right\}.$$

(en donnant la préférence à $\dfrac{x_h}{r_h} \left(\text{ou } \dfrac{y_h}{t_h} \right)$ s'il est égal au minimum).

Nous pouvons voir facilement d'après (19) que ce choix de θ respecte le but (a). Il respecte le but (b) car la composante d'indice h, que nous cherchons à enlever de la base, entre dans la compétition pour le calcul de θ risquant de quitter cette base.

Remarquons que θ, calculé de (20), aura sûrement une valeur non-négative. La composante qui entre dans la base aura donc une valeur non-négative.

Remarquons aussi, que pour un indice que l'on désire faire entrer dans la base, l'indice qui doit lui céder sa place est bien déterminé (à des équivalences près) par (20).

2°) *Description de la méthode* :

Nous commençons par une base admissible quelconque (V, W) qui permet de résoudre le système (17).

Naturellement, la base la plus facile au départ est

$$V = \{n+1, n+2, ..., n+m\},\ W = \{1, 2, ..., n\}$$

pour laquelle la solution du système précédent est :

$$x_{(n+i)} = d_i,\ y_j = c_j.$$

Une itération principale consistera à passer d'une base admissible à une autre base admissible en augmentant, au moins d'une unité, le nombre des composantes non-négatives des vecteurs X, Y. Au cours d'une itération principale nous effectuerons, si nécessaire, des itérations secondaires qui permettront d'effectuer l'itération principale.

Supposons que la base admissible (V, W) donne l'une des composantes de Y_W négative, soit $y_h < 0$, $(h \in W)$. Nous dirons qu'il y a un conflit en y_h. Une itération principale consistera à résoudre ce conflit, et cela en passant à une autre base admissible ayant $h \in V$ (donc, $h \notin W$). Pour cela nous commençons par la résolution du système :

$$\mathscr{A}_V \,.\, R_V + \mathscr{B}_W \,.\, T_W = \mathscr{A}_h$$

et comme nous avons vu dans ce qu'on a appelé le mécanisme de changement de base nous pouvons ainsi faire entrer l'indice h dans V. Le choix de l'indice qui quittera la base selon (20) sera :

$$(21) \qquad \theta = \min \left\{ \frac{y_h}{t_h},\ \frac{x_v}{r_v},\ \frac{y_w}{t_w} \,/\, x_v, y_w \geqslant 0;\ r_v, t_w > 0 \right\}.$$

Nous verrons dans le théorème (2) que $t_h < 0$. Donc, on peut calculer θ, et trouver l'indice qui doit quitter la base car c'est celui qui correspond à θ.

D'après ce choix de θ, les nouvelles composantes que donnera la nouvelle base sont d'après (19) :

$$(22)\qquad \begin{cases} x'_h = \theta \geqslant 0 \\ x'_v = x_v - \theta \,.\, r_v \qquad (\geqslant 0 \text{ si } x_v \geqslant 0) \\ y'_w = y_w - \theta \,.\, t_w \qquad (\geqslant 0 \text{ si } y_w \geqslant 0) \end{cases}$$

Donc, le nombre des composantes non-négatives n'a pas diminué, et les composantes qui étaient non-négatives le restent.

Si $\theta = \dfrac{y_h}{t_h}$ nous passons à une nouvelle base admissible car y_h sort de la base et x_h y entre; ce qui termine l'itération principale. On élimine ainsi une composante négative en la remplaçant par une autre composante non-négative. Le nombre des composantes non-négatives aura augmenté au moins d'une unité.

Si $\theta = \dfrac{x_p}{r_p} < \dfrac{y_h}{t_h}$, $\left[\text{resp. } \theta = \dfrac{y_q}{t_q} < \dfrac{y_h}{t_h}\right]$, nous passons à une base non admissible ($V' = V + \{h\} - \{p\}$, $W' = W$), (respectivement ($V' = V + \{h\}$, $W' = W - \{q\}$) et nous aurons d'après le système (22)

$$y'_h = y_h - \theta \,.\, t_h < 0.$$

Puisque p a quitté V, (respectivement q à quitté W), l'itération secondaire suivante consistera à faire entrer l'indice p dans W (respectivement faire entrer l'indice q dans V) en résolvant

$$\mathscr{A}_{V'} \,.\, R_{V'} + \mathscr{B}_W \,.\, T_{W'} = \mathscr{B}_p \quad (\text{resp. } \mathscr{A}_q),$$

et en calculant θ selon (21). Si y_h sort de la base, alors l'itération principale est terminée, sinon nous passons à l'itération secondaire suivante de la même façon et ainsi de suite. Nous prouverons par le théorème (4) que t_h reste toujours négative au cours des itérations secondaires. D'après le système (22) et le choix de θ donné par (21) on aura au cours de ces itérations $y_h < 0$. Nous pouvons donc toujours trouver une valeur $\theta \geqslant 0$.

Nous continuons les itérations secondaires jusqu'au moment où y_h quitte la base. Nous aurons ainsi teminé l'itération principale ayant obtenu une nouvelle base admissible. Nous prouverons dans le théorème (5) que nous arrivons, après un nombre fini d'itérations secondaires, à faire sortir y_h de la base. Remarquons que x_h ne peut pas quitter la base au cours des itérations secondaires car r_h reste toujours négative ou nulle comme nous verrons dans le théorème (4) donc x_h/r_h n'entre pas dans la compétition pour le calcul de θ.

La continuité et l'aboutissement de la méthode sont donc assurés pour la résolution des conflits en Y. Nous résolvons donc tous ces conflits jusqu'au moment où toutes les composantes de Y deviennent non-négatives.

Supposons maintenant que $Y \geqslant 0$, et qu'il existe un conflit en $x_h < 0$, dans une base admissible (V, W). Nous résolvons ce conflit, de la même façon, en faisant entrer h dans W, résolvant d'abord le système

$$\mathscr{A}_V \,.\, R_V + \mathscr{B}_W \,.\, T_W = \mathscr{B}_h$$

(dans lequel $r_h \leqslant 0$ comme nous verrons dans le théorème (3)), et en essayant de faire sortir x_h de la base par des itérations secondaires (si nécessaire) calculant θ, selon (20), par :

$$\theta = \min \left\{ \frac{x_h}{r_h}, \frac{x_v}{r_v}, \frac{y_w}{t_w} / \, x_v, y_w \geqslant 0; \; r_v, t_w > 0 \right\} .$$

D'après le théorème (4) qui suivra, nous aurons au cours des itérations secondaires $t_h < 0$ et $r_h \leqslant 0$. y_h ne peut pas sortir de la base car y_h/t_h n'entre pas dans la compétition pour le calcul de θ.

La différence avec la résolution des conflits en Y c'est que r_h est $\leqslant 0$ au cours des itérations secondaires et non strictement négative comme l'était t_h. Donc le calcul de 0 n'est pas toujours assuré. Mais nous prouverons dans le théorème (6) que dans le cas où θ ne peut être calculé, le programme quadratique correspondant n'admet pas de solution car le système des contraintes est incompatible.

Remarquons, qu'au cours des itérations secondaires qui appartiennent à la même itération principale, nous rencontrons toujours des bases (V, W) telles que $V \cap W = \{h\}$, $\bar{V} \cap \bar{W} = \{s\}$, h étant l'indice du conflit du commencement de l'itération principale, que ce soit en x_h ou en y_h, et s l'indice qui vient de sortir de la base dans l'itération précédente. La seule différence c'est que nous aurons $x_h \geqslant 0$, $y_h < 0$ pour un conflit commençant par $y_h < 0$, et $x_h < 0$, $y_h \geqslant 0$ pour un conflit commençant par $x_h < 0$, et cela d'après le système (19) et le choix de θ selon (20).

Nous voyons d'après cette description de la méthode que le nombre maximum d'itérations principales est égal au nombre des composantes négatives dans la base de départ.

Nous résoudrons d'abord les conflits en Y en commençant,

dans chaque itération principale, par les composantes les «plus négatives» et ensuite, les conflits en X en commençant également par les composantes «les plus négatives», dans l'espoir d'accélérer la convergence de la méthode. En effet, nous ne pouvons pas prouver que cela accélère la convergence, car ce n'est pas toujours vrai.

3°) *Justification de la méthode*

THÉORÈME 1 — Si (V^1, W^1), (V^2, W^2) sont deux bases distinctes, et (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) les vecteurs correspondants, nous avons la relation :

$$X_1' . Y_2 + X_2' . Y_1 - X_1' . Y_1 - X_2' . Y_2 \leqslant 0 \tag{23}$$

l'égalité étant possible seulement si

$$V^1 = V^2.$$

En effet, à partir de la forme (15), on peut prouver pour une base quelconque la relation :

$$D' . Y_{00} - C' . X_0 - X' . Y + X_0' . B . X_0 = 0.$$

Pour deux bases, on a d'après cette relation :

$$\begin{aligned}(Y_1)_{00}' . [A . (X_2)_0 + (X_2)_{00}] \\ - (X_1)_0' . [B . (X_2)_0 - (Y_2)_0 + A' . (Y_2)_{00}] \\ - X_1' . Y_1 + (X_1)_0' . B . (X_1)_0 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(Y_2)_{00}' . [A . (X_1)_0 + (X_1)_{00}] \\ - (X_2)_0' . [B(X_1)_0 - (Y_1)_0 + A'(Y_1)_{00}] \\ - X_2' . Y_2 + (X_2)_0' . B . (X_2)_0 = 0.\end{aligned}$$

En ajoutant ces deux équations on trouve :

$$\begin{aligned}X_1' . Y_2 + X_2' . Y_1 - X_1' . Y_1 - X' . Y_2 - \\ - (X_1 - X_2)_0' . B . (X_1 - X_2)_0 = 0\end{aligned}$$

Nous avons donc la relation (23) car B est définie positive. Nous pouvons avoir l'égalité dans la relation (23) seulement si :

$$(X_1)_0 - (X_2)_0 = 0$$

mais cela entraine $X_1 - X_2 = 0$ car

$$(X_1)_{00} = D - A \,.\, (X_1)_0 = D - A \,.\, (X_2)_0 = (X_2)_{00}.$$

Pour avoir l'égalité dans (23) on doit avoir :

$$(24) \quad \begin{cases} (x_i)_1 = (x_i)_2 & \text{quel que soit} \quad i \in V^1 \cap V^2 \\ (x_i)_1 = 0 & \text{quel que soit} \quad i \in V^1 \cap \bar{V}^2 \\ (x_i)_2 = 0 & \text{quel que soit} \quad i \in \bar{V}^1 \cap V^2 \end{cases}$$

(avec $\bar{V} = \Omega - V$, le sous-ensemble complémentaire de V).

Donc, ou bien on doit avoir une dégénérescence, ou $V^1 \cap \bar{V}^2 = \varnothing$ et $\bar{V}^1 \cap V^2 = \varnothing$ d'où $V^1 = V^2$. Notons que, même dans le cas de dégénérescence, il faut, pour avoir l'égalité dans (23), que les conditions (24) soient vérifiées.

La relation (23) prouve l'unicité de la solution du problème car, pour deux bases admissibles distinctes, cette relation devient :

$$X'_1 \,.\, Y_2 + X'_2 \,.\, Y_1 < 0,$$

et ne peut pas être vérifiée avec $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \geqslant 0$.

Pour homogénéiser l'écriture du système (12) qui est le développement de (15), nous utiliserons les notations suivantes :

Nous écrirons $a_{n+i,j}$ au lieu de $a_{i,j}$ et c_{n+i} au lieu de d_i; ainsi le système (12) devient :

$$(12') \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_k \qquad - y_j + \sum_{i=n+1}^{n+m} a_{ij} y_i = c_j & j = 1, 2, \ldots, n \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_i = c_i & i = n+1, \\ & n+2, \ldots, n+m \end{cases}$$

Pour une base (V, W) quelconque, si on met

$$\begin{aligned} J &= \{v \in V \,/\, v \leqslant n\}, & \bar{J} &= \{v \in \bar{V} \,/\, v \leqslant n\} \\ I &= \{v \in V \,/\, v > n\}, & \bar{I} &= \{v \in \bar{V} \,/\, v > n\} \\ K &= \{w \in W \,/\, w \leqslant n\}, & \bar{K} &= \{w \in \bar{W} \,/\, w \leqslant n\} \\ L &= \{w \in W \,/\, w > n\}, & \bar{L} &= \{w \in \bar{W} \,/\, w > n\}, \end{aligned}$$

le système (12′) devient pour cette base :

$$(25) \quad \begin{cases} B_{\bar{K},J} \,.\, X_J - Y_{\bar{K}} + A'_{\bar{L},\bar{K}} \,.\, Y_{\bar{L}} = C_{\bar{K}} \\ B_{K,J} \,.\, X_J \qquad + A'_{\bar{L},K} \,.\, Y_{\bar{L}} = C_K \\ A_{I,J} \,.\, X_J + X_I \qquad\qquad = C_I \\ A_{\bar{I},J} \,.\, X_J \qquad\qquad = C_{\bar{I}} \,, \end{cases}$$

en notant par $A_{I,J}$ la matrice déduite de $A = (a_{ij})$ en gardant uniquement les lignes i telles que $i \in I$ et les colonnes j telles que $j \in J$. Le sens des autres matrices et vecteurs doit être interprété d'une façon analogue.

Remarque (1) : Le système (25) a une solution unique, ((V, W) est une base), si, et seulement si, le déterminant :

$$\begin{vmatrix} B_{K,J} & A'_{\bar{L},K} \\ A_{\bar{I},J} & 0 \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

Remarque (2) — Pour une base admissible ($V, W/V \cap W = \varnothing$, $V \cup W = \Omega$) nous avons :

$$K = J,\ \bar{K} = \bar{J},\ L = I,\ \bar{L} = \bar{I}$$

et le déterminant cité dans la première remarque devient :

$$\begin{vmatrix} B_{JJ} & A'_{\bar{I},J} \\ A_{\bar{I}J} & 0 \end{vmatrix}$$

Lemme (1) — Si deux ensembles V, W forment une base alors les vecteurs $(A_{i,J};\ i \in \bar{I})$ et les vecteurs $(A_{l,K};\ l \in \bar{L})$ sont linéairement indépendants.

Cela est évident d'après la remarque (1), car c'est une condition nécessaire pour que le déterminant cité dans cette remarque ne soit pas nul.

Remarquons que, pour une base admissible, les vecteurs $(A_{i,J},\ i \in \bar{I})$ et $(A_{l,K},\ l \in \bar{L})$ sont les mêmes.

Ce théorème démontre que si (V, W) est une base on a $|V| \geqslant m$ car si $|V| < m$ on a $|I| + |J| < m$ d'où $|J| < m - |I| = |\bar{I}|$.

Lemme (2) — Les deux sous-ensembles $(V, W = \bar{V})$ forment une base (admissible) si, et seulement si, les vecteurs $(A_{i,J};\ i \in \bar{I})$ sont linéairement indépendants.

La nécessité de la condition est démontrée dans le lemme précédent. Il reste à prouver la suffisance.

Si $(V, W = \bar{V})$ ne forment pas une base nous savons d'après la forme (25) que la matrice

$$\begin{pmatrix} B_{J,J} & A'_{\bar{I},J} \\ A_{\bar{I},J} & 0 \end{pmatrix}$$

est irrégulière. Puisque la matrice B_{JJ} est définie positive, donc régulière, alors la matrice

$$\begin{pmatrix} A_{\bar{I},J} \cdot B^{-1}_{J,J} & -\Delta \\ B^{-1}_{J,J} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{J,J} & A'_{\bar{I},J} \\ B_{\bar{I},J} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_{\bar{I},J} \cdot B^{-1}_{J,J} \cdot A'_{\bar{I},J} \\ \Delta & B^{-1}_{J,J} \cdot A'_{\bar{I},J} \end{pmatrix}$$

doit être irrégulière. Mais pour cela il faut que le déterminant :

$$|A_{\bar{I},J} \cdot B^{-1}_{J,J} \cdot A'_{\bar{I},J}|$$

soit nul. Il existe donc un vecteur $\lambda_{\bar{I}} \neq 0$ tel que

$$A_{\bar{I},J} \cdot B^{-1}_{J,J} \cdot A'_{\bar{I},J} \cdot \lambda_{\bar{I}} = 0 \quad \text{d'où} \quad \lambda'_{\bar{I}} \cdot A_{\bar{I},J} = 0$$

car $B^{-1}_{J,J}$ est définie positive. Les vecteurs $(A_{i,J},\ i \in \bar{I})$ ne sont pas linéairement indépendants, d'où le lemme.

Remarque : Nous avons noté par Δ la matrice (δ_{ij});

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Les dimensions des matrices Δ et 0 sont faciles à déduire d'après leur position.

Lemme 3 — Si (V, W) est une base admissible, $h \in W$ alors :

$$(V' = V + \{h\},\ W' = W - \{h\})$$

est une base admissible.

En effet, si (V', W') n'est pas une base, les vecteurs $(A_{i,J'},\ i \in \bar{I}')$ ne seraient pas linéairement indépendants d'après le lemme (2). Nous avons l'un des deux cas suivants :

1°) $J' = J + \{h\}$, $\bar{I}' = \bar{I}$, et dans ce cas les vecteurs $(A_{i,J'} - \{h\} = A_{i,J},\ i \in \bar{I})$ ne seraient pas linéairement indépendants ce qui contredit le fait que (V, W) est une base;

2°) $J' = J$, $\bar{I}' = \bar{I} - \{h\}$, et dans ce cas aussi les vecteurs $(A_{i,J},\ i \in \bar{I}' + \{h\} = \bar{I})$ ne seraient pas linéairement indépendants ce qui contredit également le fait que (V, W) est une base.

LEMME 4 — Si $(V, W/V \cap W = \{h\}, \bar{V} \cap \bar{W} = \{s\})$ est une base (non admissible), alors :

$$(V^1 = V + \{s\}, \quad W^1 = W - \{h\})$$

et

$$(V^2 = V \quad ; \quad W^2 = W - \{h\} + \{s\})$$

sont deux bases (admissibles).

En effet, (V, W) étant une base, les vecteurs $(A_{i,J}, i \in I)$ sont linéairement indépendants d'après le lemme (1).

Mais $J = J^2 \subset J^1$ et $I = I^2 \supset I^1$ donc les vecteurs $(A_{i,J^1}, i \in I^1)$ sont linéairement indépendants ainsi que les vecteurs $(A_{i,J^2}, i \in I^2)$. D'où, d'après le lemme (2), (V^1, W^1) et (V^2, W^2) sont deux bases admissibles.

D'après le mécanisme de changement de base les lemmes (3) et (4) deviennent :

LEMME (3′) — Si (V, W) est une base admissible, $h \in W$, et $y_h \neq 0$, on a $t_h \neq 0$ dans la solution du système :

$$\mathscr{A}_V \,.\, R_V + \mathscr{B}_W \,.\, T_W = \mathscr{A}_h$$

LEMME (4′) — Si $(V, W/V \cap W = \{h\}, \bar{V} \cap \bar{W} = \{s\})$ est une base (non-admissible) et si $y_h \neq 0$, on a $t_h \neq 0$ dans la résolution du système :

$$\mathscr{A}_V \,.\, R_V + \mathscr{B}_W \,.\, T_W = \mathscr{A}_s$$

et du système :

$$\mathscr{A}_V \,.\, R_V + \mathscr{B}_W \,.\, T_W = \mathscr{B}_s.$$

THÉORÈME 2 — Si (V, W) est une base admissible et si $h \in W$, $y_h \neq 0$, on a $t_h < 0$ dans la solution du système :

$$\mathscr{A}_V \,.\, R_V + \mathscr{B}_W \,.\, T_W = \mathscr{A}_h$$

En effet, d'après les lemmes (3) et (3′) nous savons que $(V^1 = V + \{h\}, W^1 = W - \{h\})$ est une base et que $t_h \neq 0$. Et d'après le mécanisme de changement de base expliqué plus haut, nous savons que : $x_h^1 = y_h/t_h$. La relation (23), qui doit être prise comme inégalité stricte (même s'il y a dégénérescence) car $V \neq V^1$ et

$x_h^1 \neq 0$, nous donne :

$$x_h^1 \cdot y_h = \frac{y_h \cdot y_h}{t_h} < 0$$

d'où $t_h < 0$.

THÉORÈME 3 — Si (V, W) est une base admissible et si $h \in V$, $x_h \neq 0$, on a $r_h \leqslant 0$ dans la solution du système :

$$\mathscr{A}_V \cdot R_V + \mathscr{B}_W \cdot T_W = \mathscr{B}_h.$$

En effet, ou bien $r_h = 0$, ou bien $r_h \neq 0$, et dans ce dernier cas nous pouvons démontrer le théorème exactement comme le précédent.

LEMME 5 — Si $(V, W/V \cap W = \{h\}, \bar{V} \cap \bar{W} = \{s\})$ est une base, nous avons : $r_h \cdot t_h \geqslant 0$ dans la solution du système :

$$\mathscr{A}_V \cdot R_V + \mathscr{B}_W \cdot T_W = \mathscr{A}_s \text{ (ou } \mathscr{B}_s).$$

Nous savons d'après les lemmes (4) et (4') que $t_h \neq 0$ et que $(V^1 = V + \{s\}, W^1 = W - \{h\})$, (resp. $(V^1 = V, W^1 = W - \{h\} + \{s\})$) est une base admissible. D'après le mécanisme de changement de base nous devons avoir dans (V^1, W^1) :

$$x_s^1 = \frac{y_h}{t_h}, \left[\text{resp. } y_s^1 = \frac{y_h}{t_h}\right] \text{ et } x_h^1 = x_h - \frac{y_h}{t_h} \cdot r_h.$$

Le théorème (1) donne :

$$x_h^1 \cdot y_h - x_h \cdot y_h = y_h \cdot (x_h^1 - x_h) = -y_h \cdot y_h \cdot \frac{r_h}{t_h} \leqslant 0;$$

d'où $r_h \cdot t_h \geqslant 0$.

THÉORÈME 4 — Si $(V, W/V \cap W = \{h\}, \bar{V} \cap \bar{W} = \{s\})$ est une base (non-admissible) rencontrée au cours des itérations secondaires selon la méthode, nous avons :

1°) $t_h < 0$

2°) $r_h \leqslant 0$

dans la solution du système qui s'impose, soit :

(a) : $\mathscr{A}_V \cdot R_V + \mathscr{B}_W \cdot T_W = \mathscr{A}_s$

ou (b) : $\mathscr{A}_V \cdot R_V + \mathscr{B}_W \cdot T_W = \mathscr{B}_s$.

Remarquons qu'il suffit de démontrer (1°); car (2°) se déduit alors du lemme (5).

Nous savons que la première base admissible qui était à l'origine de l'itération principale vérifie (1°) ou (2°). Nous supposons que la base qui a précédé (V, W) vérifie les conditions de ce théorème.

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où (a) s'impose (selon la méthode), et supposons que la base qui a précédé était :

$$V^0 = V - \{q\},\ W^0 = W + \{s\}$$

(q peut éventuellement être h, et dans ce cas (V^0, W^0) est admissible, et serait à l'origine de l'itération principale).

Dans cette base, nous devions avoir :

$$y_s^0 \geqslant 0,\ t_s^0 > 0,\ t_h^0 < 0,\ y_h = y_h^0 - \frac{y_s^0}{t_s^0} \cdot t_h^0 \cdot$$

A partir de (V^0, W^0) nous aurions pu passer, d'après les lemmes (3) et (4) à la base admissible :

$$(V^1 = V^0 + \{q\} = V,\ W^1 = W^0 - \{h\} = W + \{s\} - \{h\})$$

avec

$$\cdot\ y_s^1 = y_s^0 - t_s^0 \cdot \frac{y_h^0}{t_h^0} \cdot$$

A partir de (V, W) nous pouvons passer à la base admissible :

$$(V^2 = V + \{s\},\ W^2 = W - \{h\})$$

avec

$$x_s^2 = \frac{y_h}{t_h} = \left(y_h^0 - t_h^0 \cdot \frac{y_s^0}{t_s^0}\right)/t_h$$

D'après le théorème (1) nous avons entre (V^1, W^1) et (V^2, W^2) la relation :

$$0 > y_s^1 \cdot x_s^2 = -\frac{1}{t_s^0 \cdot t_h^0 \cdot t_h} \cdot \left(\frac{y_h^0}{t_h^0} - \frac{y_s^0}{t_s^0}\right)^2$$

d'ou $t_h^0 \cdot t_h > 0$.

et puisque $t_h^0 < 0$ on a : $t_h < 0$.

Supposons maintenant que la base qui précède (V, W) soit :

$$V^0 = V,\ W^0 = W + \{s\} - \{q\}.$$

Si $q \neq h$, nous pouvons démontrer le théorème dans ce cas comme dans le cas précédent en considérant les bases admissibles

$$(V^1 = V,\ W^1 = W + \{s\} - \{h\})$$

et

$$(V^2 = V + \{s\},\ W^2 = W - \{h\}).$$

Si $q = h$, la démonstration est légèrement différente car nous aurons

$$(V^1 = V^0,\ W^1 = W^0) \text{ et } y_h = \frac{y_s^0}{t_s^0}.$$

Théorème (1) donne :

$$0 > y_s^1 \,.\, x_s^2 = y_s^0 \,.\, \frac{y_h}{t_h} = \frac{(y_s^0)^2}{t_s^0 \,.\, t_h}$$

et puisque $t_s^0 > 0$ alors $t_h < 0$.

Si on se place maintenant dans le cas où (b) s'impose, alors la base qui a précédé (V, W) est, soit

$$V^0 = V + \{s\} - \{q\},\ W^0 = W$$

soit

$$V^0 = V + \{s\},\ \ W^0 = W - \{q\},$$

et dans les deux cas la démonstration reste la même en changeant simplement y_s par x_s, x_s par y_s, et t_s par r_s.

Lemme (6) — Si (V, W) est une base admissible, $h \in V$, alors, la solution du système :

$$\mathscr{A}_V \,.\, R_V + \mathscr{B}_W \,.\, T_W = \mathscr{B}_h$$

donne, soit $r_h < 0$, soit $r_v = 0$ quel que soit $v \in V$.

En effet, d'après le théorème (3), nous avons $r_h \leqslant 0$. Supposons $r_h = 0$ et qu'il existe $v_0 \in V$ tel que $r_{v_0} \neq 0$. Nous allons démontrer que cela est impossible.

1°) $(V^1 = V - \{h\},\ W^1 = W + \{h\})$ n'est pas une base (admissible) car $r_h = 0$, donc, les vecteurs $(A_{i,J^1},\ i \in \bar{I}^1)$ ne sont pas linéairement indépendants d'après le lemme (2).

2°) $(V^2 = V - \{v_0\},\ \ W^2 = W + \{h\})$ est une base car $r_{v_0} \neq 0$, donc les vecteurs $(A_{l,K^2},\ 1 \in \bar{L}^2)$ sont linéairement indépendants d'après le lemme (1).

Mais nous avons :

$$K^2 = K^1 = J^1 \quad \text{et} \quad \bar{L}^2 = \bar{L}^1 = \bar{I}^1$$

car $W^2 = W^1 = \bar{V}^1$. (1°) et (2°) sont donc contradictoires, d'où le lemme.

LEMME 7 — Si $(V, W/V \cap W = \{h\}, \bar{V} \cap \bar{W} = \{s\})$ est une base (non-admissible), la solution du système

(a) $$\mathscr{A}_V \,.\, R_V + \mathscr{B}_W \,.\, T_W = \mathscr{A}_s$$

donne $r_h < 0$, et celle du système

(b) $$\mathscr{A}_V \,.\, R_V + \mathscr{B}_W \,.\, T_W = \mathscr{B}_s$$

donne, soit $r_h < 0$, soit $r_v = 0$ quel que soit $v \in V$.

Nous savons d'après le théorème (4) que $r_h \leqslant 0$. Supposons que $r_h = 0$ dans le cas (a). Nous allons démontrer que cela est impossible.

1°) (V, W) est une base, donc, les vecteurs $(A_{l,K},\ l \in \bar{L})$ sont linéairement indépendants d'après le lemme (1).

2°) $(V^1 = V + \{s\} - \{h\},\ W^1 = W)$ n'est pas une base (admissible) car $r_h = 0$, donc, les vecteurs $(A_{i,J^1},\ i \in \bar{I}^1)$ ne sont pas linéairement indépendants d'après le lemme (2).

Mais nous avons :

$$K = K^1 = J^1 \quad \text{et} \quad \bar{L} = \bar{L}^1 = \bar{I}^1$$

car $W = W^1 = \bar{V}^1$. (1°) et (2°) sont donc contradictoires et r_h doit être strictement négatif dans le cas (a).

Supposons maintenant, dans le cas (b), que $r_h = 0$ et qu'il existe $v_0 \in V$ tel que $r_{v_0} \neq 0$. Nous allons démontrer que cela est impossible.

1°) $(V^1 = V - \{h\}^0,\ W^1 = W + \{s\})$ n'est pas une base (admissible), car $r_h = 0$. Donc les vecteurs $(A_{i,J^1},\ i \in \bar{I}^1)$ sont linéairement dépendants.

2°) $(V^2 = V - \{v_0\},\ W^2 = W + \{s\})$ est une base car $r_{v_0} \neq 0$. Donc les vecteurs $(A_{l,K^2},\ l \in \bar{L}^2)$ sont linéairement indépendants.

Mais nous avons $J^1 = K^1 = K^2$ et $\bar{I}^1 = \bar{L}^1 = \bar{L}^2$ car $\bar{V}^1 = \bar{W}^1 = \bar{W}^2$. (1°) et (2°) sont donc contradictoires, et r_{v_0} doit être nul si r_h est nul.

De ces deux lemmes (6) et (7) on a la conclusion suivante :

Au cours des itérations secondaires successives, on ne peut pas

avoir deux fois de suite $r_h = 0$. En effet, si une fois nous avons $r_h = 0$, donc $r_v = 0$ quel que soit $v \in V$, alors c'est un y qui sortira de la base. L'itération suivante sera du genre (a), et nous aurons $r_h < 0$.

THÉORÈME 5 — La composante x_h ou y_h qui était à l'origine d'un conflit sort de la base après un nombre fini d'itérations secondaires, avec la seule condition que θ soit calculable par (20).

Nous pouvons démontrer ce théorème seulement dans le cas de non-dégénérescence bien que, pratiquement, il soit valable même dans le cas de dégénérescence.

Supposons qu'il n'y ait pas de dégénérescence; θ aura, dans chaque itération, une valeur strictement positive.

Si le conflit a commencé en $y_h^0 < 0$, nous aurons dans les itérations intermédiaires successives :

$$y_h^0 < y_h^1 < y_h^2 < \dots ,$$

car

$$y_h^{(r+1)} = y_h^{(r)} - \theta^{(r)} \cdot t_h^{(r)} > y_h^{(r)} \text{ car } \theta^{(r)} > 0 \text{ et } t_h^{(r)} < 0 \cdot$$

Si le conflit a commencé en $x_h^0 < 0$, nous aurons également la même suite strictement croissante des valeurs de y_h^0, en mettant

$$y_h^0 = 0 \qquad \text{et} \qquad y_h^1 = \theta^0 > 0.$$

Dans les deux cas nous ne pouvons pas rencontrer deux fois la même base non admissible (V, $W/V \cap W = \{h\}$). Le nombre de ces bases étant fini, le nombre des itérations intermédiaires doit être fini. Or, θ étant toujours calculable par (20), le processus ne peut s'arrêter que par la sortie de la base de la variable qui était à l'origine du conflit.

THÉORÈME 6 — Si après avoir obtenu $Y \geqslant 0$, une itération principale a commencé par un conflit en $x_h < 0$, et si, dès le début de cette itération ou au cours des itérations secondaires, nous arrivons à un moment où θ ne peut pas être calculé par (20), alors le problème n'a pas de solution.

En effet, θ ne peut pas être calculé de (20) pour une base (V, W) si, et seulement si :

1°) $r_h = 0$ donc $r_v = 0$, $\forall\, v \in V$, d'après les lemmes 6 et 7;

2°) $\forall w \in W,\ t_w \leqslant 0.$

Supposons que c'est le cas pour une base admissible (V, W), $h \in V$. Si $h \leqslant n$, ajoutons une inconnue x_0 ayant dans A la colonne $-A_h$, dans B l'élément diagonal $+1$ et dans C l'élément $c_0 = -K$ avec K un nombre positif aussi grand que l'on veut. La fonction économique a maximiser devient :

$$F' = F - K \,.\, x_0 - 1/2 x_0^2$$

et les contraintes deviennent : $-A_h \,.\, x_0 + A \,.\, X_0 \leqslant D.$

La matrice B est restée définie positive et la méthode de résolution peut s'appliquer. Le système (12′) devient :

$$\begin{aligned}
x_0 \qquad & -y_0 - \sum_{i=n+1}^{n+m} a_{ih} y_i = -k \\
& + \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_k \qquad -y_j + \sum_{i=n+1}^{n+m} a_{ij} y_i = c_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \\
& -a_{ih} \,.\, x_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_i = c_i \quad (i = (n+1), \ldots (n+m))
\end{aligned}$$

Considérons la base ($V^1 = V$, $W^1 = W + \{0\}$) en ajoutant à W l'indice $\{0\}$, c'est-à-dire en considérant que y_0 fait partie des composantes de la base. Nous aurons

$$X^1_V = X_V,\ Y^1_W = Y_W \geqslant 0,\ y_0 = K + (\text{fini})$$

et nous pouvons voir facilement que nous aurons comme suite, selon la méthode, et dans les conditions (1°) et (2°)

$$R^1_V = R_V = 0,\ T^1_W = T_W \leqslant 0,\ t_0 = 1.$$

La composante qui sort de la base pour céder la place à y_h est obligatoirement y_0 avec $\theta^1 = y_0/t_0 = K + (\text{fini})$. Nous passons ainsi à la base ($V^2 = V$, $W^2 = W + \{h\}$) avec

$$\begin{aligned}
X^2_V = X_V,\ Y^2_W = Y_W - \theta^1 \,.\, T_W = (-T_W) \,.\, K + (\text{fini}) \geqslant 0, \\
y^2_h = \theta^1 \\
= K + (\text{fini}).
\end{aligned}$$

Maintenant nous devons faire entrer x_0 dans la base. Nous devons, pour ce faire, résoudre le système :

$$A'_{\bar{I},h} \,.\, T^2_{\bar{I}} = 1$$

$$B_{\bar{I},J} \cdot R^2_J \ldots - T^2_{\bar{J}} + A'_{\bar{I},\bar{J}} \cdot T^2_{\bar{I}} = 0$$

$$B_{h,J} \cdot R^2_J \quad - t^2_h \quad + A'_{\bar{I},h} \cdot T^2_{\bar{I}} = 0$$

$$B_{J-h,J} \cdot R^2_J \ldots\ldots\ldots + A'_{\bar{I},J-h} \cdot T^2_{\bar{I}} = 0$$

$$-A_{I,J} \cdot R^2_J + R^2_I \ldots\ldots\ldots = A_{I,h}$$

$$-A_{\bar{I},J} \cdot R^2_J \ldots\ldots\ldots = A_{\bar{I},h}$$

Puisque $(V - \{h\}, W + \{h\})$ n'est pas une base, on a d'après le lemme (3) : $\exists \lambda_{\bar{I}} \neq 0$; $\lambda_{\bar{I}} \cdot A_{\bar{I},J-\{h\}} = 0$. Et puisque (V, W) est une base, nous devons avoir d'après le même lemme :

$$\lambda_{\bar{I}} \cdot A_{\bar{I},h} \neq 0.$$

En multipliant le dernier système d'équations par $\lambda_{\bar{I}}$ on trouve :

$$-(\lambda_{\bar{I}} \cdot A_{\bar{I},h}) = \lambda_{\bar{I}} \cdot A_{\bar{I},J} \cdot R^2_J = (\lambda_{\bar{I}} \cdot A_{\bar{I},h}) \cdot r^2_h$$

d'où $r^2_h = -1$.

Si l'on prend maintenant $\theta^2 = x^2_h / r^2_h = -x_h > 0$, nous aurons la base admissible $(V^3 = V + \{0\} - \{h\}, W^3 = W + \{h\})$ avec :

$$X^3_V = X_V + R^2_V \cdot x_h \text{ (fini)}$$

$$X^3_0 = -x_h > 0$$

$$Y^3_W = Y^2_W + T^2_W \cdot x_h = (-T_W) \cdot K + (\text{fini}) \geqslant 0$$

$$y^3_h = y^2_h + t^2_h \cdot x_h = K + (\text{fini}) > 0.$$

Si ce problème a une solution (V*, W*) nous devons avoir y_0 dans cette base, avec la valeur $y^*_0 = K + (\text{fini})$, et non x_0. Si une telle solution (V*, W*) existe nous aurons d'après le théorème (1) : $0 > x^3_0 \cdot y^*_0 + (Y^3)' \cdot (x^*) + (X^3)' \cdot (Y^*) + (-x_h) \cdot K + (\text{une quantité positive ou finie})$.

Mais cela est impossible car $x_h < 0$ et $K \geqslant 0$.

Si $h > n$, la démonstration est rigoureusement la même, avec la seule différence que la colonne qui correspond à x_0 dans A est une colonne nulle sauf dans la case (h) où il y a -1.

De la même façon on démontre le théorème pour une base non-admissible ($V, W/V \cap W = \{h\}$, $\bar{V} \cap \bar{W} = \{s\}$), avec les différences suivantes :

$$t_0 = -t_h > 0 \qquad \text{au lieu de } t_0 = 1$$

$$\theta^1 = \frac{K}{(-t_h)} + (\text{fini}) > 0 \quad \text{au lieu de} \quad \theta^1 = K + (\text{fini}) > 0$$

$(V^2 = V, W^2 = W + \{s\})$ » » $(V^2 = V, W^2 = W + \{h\})$

$y_h^2 = y_h - t_h \cdot \theta^1 > 0$ » » $y_h^2 = \theta^1 > 0$

et l'on ajoute $y_s^2 = \theta^1 > 0$.

Ce théorème termine la démonstration complète de la méthode de résolution.

Remarquons que la relation (23) prouvée dans le théorème (1) n'est autre que la relation (c') du parag. 3, avec la seule différence qu'ici nous considérons deux bases quelconques (admissibles ou non), tandis qu'au parag. 3 nous avions toujours des bases admissibles.

De la même façon, nous pouvons prouver que les relations (a') et (b') du parag. 3 deviennent pour des bases quelconques, et avec les notations de la forme (15) :

(a'') $2F(V, W) = C' \cdot X_0 + D' \cdot Y_{00} - X' \cdot Y$

(b'') $2[F(V^2, W^2) - F(V^1, W^1)] =$
$= X_1' \cdot Y_2 - Y_1' \cdot X_2 + X_1' \cdot Y_1 - X_2' \cdot Y_2.$

Le dernier terme de (a'') et les deux derniers termes de (b'') disparaissent pour les bases admissibles, et l'on retrouve dans ce cas (a') et (b').

Nous pouvons profiter de (b'') pour calculer les variations de la fonction économique au cours de la résolution.

Géométriquement, la méthode proposée ici dirige le point $\vec{X}$, correspondant aux bases successives, vers le point solution de la façon suivante :

Si P est le polyèdre des contraintes nous pouvons rencontrer au cours de résolution les cas suivants :

Cas 1 : X a des composantes négatives et Y également :

Nous commençons par résoudre les conflits de Y. Le point $\vec{X}$ se déplace en dehors du polyèdre P, jusqu'au sommet où l'on passe à l'un ou l'autre des cas suivants, ou à la solution.

Cas 2 : $Y \geqslant 0$, X a des composantes négatives :

Nous résolvons les conflits de X. Le point $\vec{X}$ est à l'extérieur de P; il se déplace toujours en dehors de ce polyèdre et ne le touche qu'au point solution.

Cas 3 : $X \geqslant 0$, Y a des composantes négatives :

Nous résolvons les conflits de Y. Le point $\vec{X}$ est à l'intérieur ou sur la surface de P; il ne quitte plus ce polyèdre jusqu'au moment où on atteint la solution.

Remarquons finalement que si l'on met :

$$Z = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_{00} \end{pmatrix} \quad , \qquad U = \begin{pmatrix} Y_0 \\ X_{00} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} B & A' \\ -A & O \end{pmatrix} \quad , \qquad S = \begin{pmatrix} C \\ -D \end{pmatrix}$$

le programme quadratique dans sa forme (15) devient :

Trouver les vecteurs Z et U, orthogonaux et non-négatifs, vérifiant :

$$M \,.\, Z = U = S. \tag{25}$$

M ici est semi-définie-positive.

La méthode que nous avons proposée est également valable pour n'importe quel système du genre (25), si M est une matrice définie-positive quelconque.

Si M est, en plus, symétrique, cela donne la solution du programme : Maximiser $f(Z) = S' \,.\, Z = 1/2\, Z' \,.\, M \,.\, Z$ avec les seules contraintes $Z \geqslant 0$.

5. — Exemples

Dans les exemples suivants nous entourons par un petit cercle la composante en conflit, avec laquelle on commence l'itération principale. Nous entourons par un grand contour la composante x ou y qui sort de la base avec r ou t qui lui correspond. Nous indiquons par une flèche la variable qui doit entrer dans la base dans l'itération correspondante. Deux lignes horizontales limitent une itération. Ainsi l'exemple (1) comporte 4 itérations principales et 3 itérations secondaires.

La valeur de θ est inscrite pour chaque itération, ainsi que les

variations de F, calculée d'une base à l'autre à l'aide de (b″). Ce calcul des variations de F est très facile car entre deux bases consécutives on a :

$$2(F^2 - F^1) = (x_h^1 - x_h^2)(y_h^1 + y_h^2)$$

h étant l'indice du conflit de l'itération principale.

Les exemples ont été choisis de la façon suivante :

Le premier correspond à un problème qui a une solution, et qui présente une grande variété de changement de base.

Le second exemple correspond à un problème qui n'admet pas de solution.

Le troisième exemple a une grande dégénérescence.

Afin d'obtenir une meilleure présentation et pour faciliter la lecture nous avons interverti les exemples 1 et 2.

Exemple 2

Maximiser :

$$F = -40x_1 + 28x_2 + 17x_3 + 27x_4 - \frac{1}{2}(2x_1^2 - 4x_1x_4 + 10x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_2x_4 + 9x_3^2 + 6x_3x_4 + 5x_4^2)$$

avec

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &\leqslant -3 \\ x_2 + x_3 + 4x_4 &\leqslant 2 \\ 3x_1 - x_3 + 3x_4 &\leqslant -6 \end{aligned} \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0.$$

$-x_1$	$-x_2$	$+x_3$		$+x_5$								$=-3$	
	x_2	$+x_3$	$+4x_4$		$+x_6$							$=2$	
$3x_1$		$-x_3$	$-3x_4$			$+x_7$						$=-6$	
$2x_1$			$-2x_4$				$-y_1$			$-y_5$	$+3y_7$	$=-40$	
	$10x_2$	$-3x_3$	$-x_4$					$-y_2$		$-y_5$ $+y_6$		$=28$	
	$-3x_2$	$+9x_3$	$+3x_4$						$-y_3$	$+y_5$ $+y_6$	$-y_7$	$=17$	
$-2x_1$	$-x_2$	$+3x_3$	$+5x_4$							$-y_4$ $+4y_6$	$-3y_7$	$=27$	

↓		-3	**2**	-6	40	**-28**	-17	-27		$2F_0 = 0$
		-1	**1**	0	0	-10	3	1		$\theta = 2$
2		-1		-6	40	**-8**	-23	-29	↓	$2F_0' = 2F_0 + 72$
0		0		0	0	**-1**	-1	-4		$\theta = 8$
2	↓	-1		-6	40		**-15**	3	8	$2F_1 = 2F_0' + 0$
1		2		-1	0		**-25**	-56	-13	$\theta = 3/5$
$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{11}{5}$		**$-\frac{27}{5}$**	40			$\frac{183}{5}$	$\frac{79}{5}$	$2F_2 = 2F_1 + 9$
$\frac{1}{25}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$		$-\frac{1}{25}$	-3			$\frac{19}{25}$	$-\frac{13}{25}$	$\theta = 35$
	2	-5		-4	145	↓		10	34	35 $2F_2' = 2F_2 - 49$
	0	0		0	-3			-1	-1	-1

θ ne peut par être calculé dans la dernière itération. Le problème n'a pas de solution car les contraintes sont incompatibles.

Exemple 1

Maximiser :

$$F = 5x_1 + 12x_2 + 36x_3 + 7x_4 - \frac{1}{2}(5x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_4 + 2x_2^2 - 6x_2x_3 - 9x_3^2 + 10x_4^2)$$

avec

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &\leqslant -18 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &\leqslant -5 \\ -3x_2 + x_4 &\leqslant 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= -18 \\
-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_6 &= -5 \\
-3x_2 + x_4 + x_7 &= 1 \\
5x_1 + 2x_2 - x_4 - y_1 &= 5 \\
2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - y_2 + y_5 - y_6 &= 5 \\
-3x_2 + 9x_3 - y_3 + y_5 + y_6 - 3y_7 &= 12 \\
-x_1 + 10x_4 - y_4 - y_5 - 2y_6 &= 36 \\
+ y_7 &= 7
\end{aligned}$$

	↓		−18	−5	1	−5	−12	(−36)	−7		$2F_0 = 0$
			−1	−2	0	0	3	−9	0		$\theta = 4$
↓	4		−14	3	1	−5	(−24)		−7		$2F_1 = 2F_0 + 144$
	−1/3		2/3	1/3	−3	−2	−1		0		$\theta = 9$
9	7		−20		28	13	−15		−7	↓	$2F_1' = 2F_1 + 351$
−4/3	−2/3		2/3		−4	−5/3	−5/3		0		$\theta = 9$
21	13	↓	−26		64	28		(−7)		9	$2F_2 = 2F_1' + 180$
0	0		−1		1	1		−10		0	$\theta = 7/10$

21	13	$7/10$	$\boxed{-25{,}3}$	$63{,}3$	$27{,}3$	$\boxed{9}$	$2F_3 = 2F_2 + 4{,}9$
$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$-\left(\frac{1}{10}\right)$	$-0{,}3$	$1{,}3$	$-0{,}9$	$\boxed{\frac{8}{10}}$	$\theta = 90/8$
$\frac{132}{8}$	$\frac{86}{8}$	$\frac{146}{80}$	$-\frac{1754}{80}$	$\boxed{\frac{3894}{80}}$	$\frac{2994}{80}$	$\frac{90}{8}$	$2F_3' = 2F_3 - 37{,}9$
$\frac{6}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{9}{40}$	$-\frac{59}{40}$	$\frac{189}{40}$	$\frac{39}{40}$	$-\frac{9}{4}$	$\theta = \frac{649}{63}$
$\frac{22}{21}$	$\frac{515}{63}$	$\frac{29}{7}$	$\boxed{-\frac{424}{63}}$	$\frac{649}{63}$	$\frac{575}{21}$	$\frac{241}{7}$	$2F_3'' = 2F_3' - 693$
$-\frac{1}{9}$	$-\frac{14}{27}$	$-\frac{1}{3}$	$\boxed{-\frac{20}{27}}$	$-\frac{25}{27}$	$-\frac{38}{9}$	$-\frac{13}{3}$	$\theta = \frac{636}{70}$
$\frac{144}{70}$	$\frac{902}{70}$	$\frac{502}{70}$		$\frac{131}{70}$	$\frac{4602}{70}$	$\frac{5166}{70}$	$2F_4 = 2F_3'' - 728$
							$\boxed{F \approx -390}$

Exemple 3

Maximiser :

$$-4x_1+12x_2-4x_3+7x_4-\frac{1}{2}(2x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2-2x_2x_3+2x_3x_4+x_3^2+x_4^2)$$

avec

$$\begin{aligned} x_1-2x_2 \quad +x_4 &\leqslant -8\\ -x_1 \quad +x_3 &\leqslant 1\\ x_2-x_3-x_4 &\leqslant 6 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr}
x_1 & -2x_2 & & +x_4 & +x_5 & & & & & & & & = & -8\\
-x_1 & & +x_3 & & & +x_6 & & & & & & & = & 1\\
 & x_2 & -x_3 & -x_4 & & & +x_7 & & & & & & = & 6\\
2x_1 & -x_2 & & & & & & -y_1 & & & +y_5 & -y_6 & = & -4\\
-x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & & & & & -y_2 & & -2y_5 & & +y_7 = & 12\\
 & -x_2 & +x_3 & & & & & & & -y_3 & & +y_6 & -y_7 = & -4\\
 & x_2 & & +x_4 & & & & & & & -y_4 & +y_5 & -y_7 = & 7
\end{array}$$

↓			-8 -2	1 0	6 1	4 1	$\boxed{\textcircled{-12}}$ $\boxed{-3}$	4 1	-7 -1	$2F_0=0$ $\theta=4$
4 $\frac{1}{3}$		↓	$\boxed{0}$ $\boxed{\frac{5}{3}}$	1 0	2 $-\frac{4}{3}$	0 $-\frac{1}{3}$	0 $-\frac{1}{3}$	0 $-\frac{1}{3}$	$\textcircled{-3}$ $-\frac{2}{3}$	$2F_1=2F_0+48$ $\theta=0$
4 $-\frac{2}{5}$		0 $-\frac{4}{5}$		1 0	2 $-\frac{2}{5}$	0 $-\frac{3}{5}$	$\boxed{0}$ $\boxed{\frac{2}{5}}$	-3 $-\frac{11}{5}$	↓	$2F_1'=2F_1+0$ $\theta=0$
4 -1	↓	0 -2		1 1	2 -2	0 -1		$\boxed{-3}$ $\boxed{-5}$	0 -2	$2F_1''=2F_1'+0$ $\theta=3/5$
$\frac{23}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$		$\frac{2}{5}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{3}{5}$			$\frac{6}{5}$	$2F_2=2F_1''+18/5$
										$\boxed{F=51{,}6}$

6. — Conclusions

Dans les paragraphes 1, 2 et 3 nous avons donné une nouvelle forme aux programmes linéaires et quadratiques, en introduisant des variables booléennes. Cette forme booléenne nous a permis de trouver quelques résultats théoriques, et surtout sur la question du dénombrement des solutions d'un programme paramétrique. Dans les notes [10], nous avons tiré de cette forme booléenne une méthode de résolution de ces programmes, mais nous avons présenté ici dans le paragraphe 4, une toute nouvelle méthode.

Cette méthode est *totalement homogène*, et nous évite beaucoup des inconvénients que nous rencontrons dans d'autres méthodes. En effet, nous n'avons plus besoin de résoudre des programmes linéaires auxiliaires, ni d'utiliser aucun autre moyen étranger à notre problème. Nous n'ajoutons aucune variable supplémentaire, ce qui laisse le problème dans ses dimensions initiales. En plus, nous pouvons choisir librement la base du départ car elle n'est plus restreinte par la condition $X \geqslant 0$.

Au cours de la résolution, on ne se rend même pas compte si on est sur un sommet du polyèdre, sur une de ses arêtes, ou sur une de ses faces d'ordre quelconque, la méthode étant la même et aucune précaution spéciale n'étant nécessaire. Le tableau correspondant à la résolution est très pratique et permet de faire facilement les comparaisons des x/r, y/t pour trouver 0. Il permet également de calculer la fonction économique à chaque étape d'une façon très simple. Ce tableau permet aussi de corriger facilement une faute de calcul qu'on peut avoir faite, car il représente à lui seul, tous les systèmes qu'on avait à résoudre au cours du calcul.

7. — Applications numériques sur machine

Les essais suivants ont été effectués sur l'ordinateur 7 090 IBM France.

Nous avons écrit la méthode du parag. 4 en langage FORTRAN. Le programme a été simple malgré les plusieurs variantes que nous y avons introduites afin d'avoir la possibilité de contrôler, à volonté, le déroulement de la résolution, et de tester la validité de la solution optimale. Les problèmes essayés étaient les suivants :

a) Les trois exemples cités au parag. 5, ainsi qu'un quatrième exemple du même genre.

b) Neuf exemples dont les données étaient tirées au hasard grâce au sous-programme PF DUN. Sept de ces exemples étaient des programmes quadratiques de dimensions : ($n = 8$, $m = 5$), ($n = 10$, $m = 8$), ($n = 17$, $m = 15$), ($n = 20$, $m = 15$), ($n = 30$, $m = 25$), ($n = 60$, $m = 50$) et ($n = 70$, $m = 60$).

Les deux autres exemples étaient de dimensions ($n = 10$, $m = 8$) et ($n = 20$, $m = 15$), et ils correspondaient à des problèmes du genre ($M \,.\, Z - U = S$, $Z \geqslant 0$, $U \geqslant 0$, $Z' \,.\, U = 0$), avec

$$M = \begin{pmatrix} B & A' \\ -A & E \end{pmatrix},$$

B et E étant deux matrices symétriques définies positives de dimensions $n \times n$ et $m \times m$ respectivement. Donc M est définie positive mais non symétrique. (Nous pouvons voir facilement que ce genre de problème a toujours une solution, et la méthode s'y applique parfaitement).

Dans les sept exemples des programmes quadratiques il y en avait un qui n'avait pas de solution, c'était celui qui correspondait à $n = 8$, $m = 5$, les autres en avaient.

La résolution de tous ces exemples n'a présenté aucune difficulté.

Pour faciliter la mise en langage FORTRAN de la méthode et pour faciliter en même temps le calcul de θ, nous avons considéré les composantes X_V et Y_W d'une base ($V, W / |V| + |W| = n + m$) comme étant celles d'un vecteur Z avec $z_i = x_i$ si $i \in V$ et $z_i = y_i$ si $i \in W$. De la même façon, nous avons considéré les composantes R_V et T_W comme celle du vecteur S avec $s_i = r_i$ si $i \in V$ et $s_i = t_i$ si $i \in W$.

Puisque nous rencontrons des bases telles que $V \cap W = \{h\}$, nous aurons une confusion sur $z_h = x_h$ et $z_h = y_h$. Pour éviter cette confusion nous avons donné l'indice $(n + m + 1)$, au lieu de (h), à la composante z_h qui correspond à la variable qui a créé le conflit. En même temps, nous avons mis

$$z_{n+m+1} = -x_h \text{ (ou } -y_h) > 0$$
$$s_{n+m+1} = -r_h \text{ (ou } -t_h) \geqslant 0$$

ce qui permet de calculer θ plus facilement, car nous aurons :

$$\theta = \min \left\{ \frac{z_i}{s_i} / \, z_i \geqslant 0, \, s_i > 0 \right\}.$$

On ne peut pas faire une comparaison entre cette méthode et une autre, du point de vue temps machine, car cela exigerait d'écrire les deux méthodes en même langage et d'utiliser le même procédé pour la création des données au hasard. En plus, dans le programme FORTRAN que nous avons écrit, nous avons cherché surtout à avoir les possibilités de contrôle qui sont utiles seulement dans le stade expérimental. J'ajouterais que, n'ayant pas une grande expérience dans l'utilisation du langage FORTRAN, le programme que j'ai écrit dans ce langage ne doit pas être le plus économique au point de vue du temps.

Remarquons à titre d'indication que dans le programme quadratique avec $n = 60$ et $m = 50$ on avait :

18 itérations principales pour des conflits en Y
11 » » » » X
et 212 itérations secondaires.

La solution optimale contenait : 63 composantes de X
et 47 » » Y

La résolution de cet exemple a pris plus de 7 minutes, mais remarquons que pour créer au hasard la matrice définie positive, B de dimensions 60×60 nous avons créé au hasard une matrice P de dimensions 60×60, et nous avons effectué la multiplication matricielle P. P′ pour avoir B. Cette multiplication matricielle ainsi que la création des matrices, P, A, D, C, et la vérification de la solution optimale effectuée par la machine, ont pris une grande partie de ce temps de calcul.

Une estimation assez élémentaire nous permet de dire que le temps de résolution d'un programme quadratique de n inconnues et m contraintes est proportionnel à $(n+m)^3$.

PREMIÈRE PARTIE

[1] C. Berge : «Théorie des graphes», Paris 1958.
[2] Birkhoff et Mac Lane : "A survey of modern algebra", New York 1957.
[3] G. Boole : "The mathematical analysis of logic", Cambridge 1847.
[4] R. Fortet : «L'algèbre de Boole et ses applications en recherche opérationnelle», *Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle*, nº 4, p. 5, Bruxelles 1959.
[5] R. Fortet : «Applications de l'Algèbre de Boole en Recherche Opérationnelle», *Revue Française de Recherche Opérationnelle*, nº 14, Paris 1960.
[6] R.S. Ledley : "Mathematical foundations and computational methods for digital logic machine", *J.O.R.S.A.*, Août 1954.
[7] R.D. Luce : "A Note on Boolean Matrix theory", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3, (1952), p. 382.
[8] Mac Cluskey : "Minimization of Boolean Functions", *The Bell System Technical Journal*, Novembre 1956.
[9] K. Maghout : «Algèbre de Boole et connexité d'un graphe», Séminaire sur les problèmes combinatoires, I.H.P. le 15 mars 1961, et Faculté des Sciences le 22 février 1962.
[10] K. Maghout : «Détermination des nombres de stabilité et du nombre chromatique d'un graphe», — *C.R. de l'Acad. des Sc.*, t. 248, p. 3522, (22 juin 1959).
[11] P. Naslin : «Circuits à relais et automatisation à séquences», Paris 1958.
[12] Parker et Bernstein : "On uniquely solvable boolean equations", University of California, 1955.
[13] D. Rosenblatt : "On the graphs and asymptotic forms of finite Boolean relation matrices and stochastic matrices", *Naval Res. Log. Quart.*, Juin 1957.
[14] Sikorsky : "Boolean Algebras", Berlin 1960.
[15] J. Ville : «Éléments de l'Algèbre de Boole», — I.S.U.P. 1955.

DEUXIÈME PARTIE

[1] E.M.E. Beale : "On quadratic programming", *Naval Res. Log. Quart.*, Vol. 7, nº 3 (Septembre 1959).
[2] Boot : "Notes on quadratic programming; the Kuhn-Tucker and Theil-Van de Panne conditions, degeneracy, and equality constraints", *Management Science*, (Octobre 1961), p. 85.
[3] Dantzig, Ford et Fulkerson : "A primal-dual algorithm", *Annals of Math. Study*, 38, pp. 171-181. (Princeton Univ. Press, 1956).
[4] Dorfman, Samuelson et Solow : "Linear programming and economic analysis", (1958).
[5] R. Fortet : «Programmes linéaires stochastiques», Groupe de Travail «Mathématiques des programmes economiques», AFCALTI-SOFRO, exposé du 5 juin 1961.
[6] Gass et Saaty : "The computational algorithm for the parametric objective function", *Naval Res. Log. Quart.*, 2, (1955), pp. 39-45.
[7] C. Hildreth : "A quadratic programming procedure", *Nav. Res. Log. Quart.*, Vol. 4, nº 1, (mars 1957).

[8] Mc Kinsey : "Introduction to the Theory of Games" (1952).
[9] Kelley : "Parametric programming and the Primal dual Algorithm", *J. Oper. Res. Soc. Amer.* (Mai-Juin 1959).
[10] K. Maghout : «*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*»,
t. 250, p. 2510 (1960),
t. 250, p. 2837 (1960)
t. 252, p. 3186 (1961)
t. 252, p. 3381 (1961).
[11] K. Maghout : «Application de l'Algèbre de Boole sur les programmes linéaires», Séminaire de Calcul des Probabilités, I.H.P. le 1er avril 1960.
[12] Saaty et Gass : "Parametric objective function", *Journal of Oper. Res.* (Août 1954), p. 316 et (Novembre 1955), p. 395.
[13] Saaty : "Mathematical methods of operations research", (1959).
[14] Theil et Van de Panne : "Quadratic programming as an extension of classical quadratic maximization", *Management Science*, 7, 1, pp. 1-20, (Octobre 1960).
[15] A. Vazsonyi : "Scientific programming in Business and industry", (1958).
[16] Wolfe et Frank : "An algorithm for quadratic programming", *Naval Res. Log. Quart.*, Vol. 3, nº 1 et 2, (Mars-Juin 1956).
[17] Wolfe : "The simplex method for quadratic programming", *Econometrica*, 27, 3, pp. 382-398 (Juillet 1959).

TABLE DES MATIÈRES

AVANT PROPOS 9

INTRODUCTION : Algèbre de Boole 9

PREMIÈRE PARTIE : Applications aux graphes 13

CHAPITRE PREMIER : Ensembles stables, noyaux, nombres des stabilités et nombre chromatique d'un graphe . . . 13

Parag. 1 : Graphes et Matrices booléennes 13
Parag. 2 : Détermination des ensembles extérieurement stables et du nombre de stabilité externe 14
Parag. 3 : Détermination des ensembles intérieurement stables et du nombre de stabilité interne 16
Parag. 4 : Détermination des noyaux d'un graphe 19
Parag. 5 : Nombre chromatique 21

Parag. 6 : Application au couplage d'un graphe 22
Parag. 7 : Conclusion du chapitre I 22

CHAPITRE II : Connexité d'un graphe 24

Parag. 1 : Opérations sur l'ensemble Ω des matrices booléennes . 24
Parag. 2 : Chemins et écarts entre sommets, fermeture transitive d'un graphe 25
Parag. 3 : Ecartement des sommets, centres et rayon d'un graphe 27
Parag. 4 : Connexité forte, diamètre et points périphériques d'un graphe. 28
Parag. 5 : Circuits et composantes fortement connexes d'un graphe. 29
Parag. 6 : Conclusion du chapitre II 32

CHAPITRE III : Applications à la théorie des graphes 33

Parag. 1 : Graphes (p,q) — totaux 33
Parag. 2 : Coloration des graphes 40
Parag. 3 : Conclusion du chapitre III 42

DEUXIÈME PARTIE : Applications sur les programmes linéaires et quadratiques 44

Parag. 1 : Programmes linéaires 44
Parag. 2 : Programmes linéaires paramétriques 49
Parag. 3 : Programmes quadratiques 51

Parag. 4 : Nouvelle méthode de résolution des programmes quadratiques 54
1°) Mécanisme de changement de base 57
2°) Description de la méthode 59
3°) Justification de la méthode 62
Parag. 5 : Exemples 75
Parag. 6 : Conclusions de la deuxième partie 81
Parag. 7 : Applications numériques sur machine 81

BIBLIOGRAPHIE 84

Première partie 84
Deuxième partie 84

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

«Portée des intégrations d'après la méthode de Denjoy»

Vu et approuvé :
Paris le 18 juillet 1962
Le Doyen de la Faculté des Sciences
Marc ZAMANSKY

Vu
et Permis d'imprimer
Le Recteur de l'Académie
de Paris
Jean ROCHE

(T 213) Imprimerie Ceuterick, s.c., 153, rue de Bruxelles, Louvain
Dir. L. Pitsi, 25, rue Dagobert, Louvain (Belgique)
IMPRIMÉ EN BELGIQUE

PRINTED IN BELGIUM